Ueber die

Darstellung der Eigenbewegungen der Fixsterne

und die

Bewegung des Sonnensystems.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei der

Hohen philosophischen Facultät

der königl. Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Oscar Hecker

aus Osnabrück.

München 1891.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.

Ueber die

Darstellung der Eigenbewegungen der Fixsterne

und die

Bewegung des Sonnensystems.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei der

Hohen philosophischen Facultät

der königl. Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Oscar Hecker

aus Osnabrück.

München 1891.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.

Die Eigenbewegungen der Fixsterne, welche sich einerseits aus der jedem einzelnen eigentümlichen Bewegung im Raume, andrerseits aus der parallaktischen Verschiebung, wie sie durch die Bewegung unseres Sonnensystems hervorgerufen wird, zusammensetzen, erlauben uns, die Bewegungsrichtung unserer Sonne zu bestimmen, wenn wir die Voraussetzung machen, dass sich der erste Teil der Eigenbewegungen, der motus peculiaris, entweder im Mittel aufhebt, oder gewissen von uns bestimmbaren Gesetzen folgt.

Eine solche Apexbestimmung lässt sich in doppelter Weise ausführen, erstens durch die Eigenbewegungen, wie sie sich aus den Differenzen von Sternpositionen, die eine längere Reihe von Jahren auseinander liegen, ergeben, zweitens aus den Verschiebungen, welche die Spectrallinien durch die Annäherung oder Entfernung eines Sternes erleiden.

Trotz der Vervollkommnung, welche in letzter Zeit die Methode der spectroskopischen Messung durch die Anwendung der Photographie erfahren hat, sind die Bestimmungen von Sterngeschwindigkeiten immer noch mit einem relativ grossen Fehler behaftet, und werden an Genauigkeit von den rein astronomisch gemessenen Eigenbewegungen weit übertroffen. Auch in der Zukunft wird sich dieses wahrscheinlich nicht ändern, da letztere sich summieren und die Beobachtungsfehler bei Positionen, welche viele Jahre auseinander liegen, verhältnismässig geringer das Resultat verfälschen, während die auch an sich weit grösseren Beobachtungsfehler der spectralanalytischen Messung voll in dasselbe eingehen.

Auch bei einer weiteren Steigerung der Genauigkeit der Spectralmessungen ist eine Verbindung beider Methoden, die das genaueste Resultat ergeben würde, streng nur für die Sterne mit bekannter Parallaxe

durchzuführen, da wir die beiden Componenten, nämlich die Eigenbewegung in der Richtung des Visionsradius, wie sie uns die spectralanalytische Messung in linearem Maass ergiebt, und die hierzu senkrechte, wie man sie durch astronomische Coordinatenbestimmung in Bogenmaass erhält, nicht auf dieselbe Einheit reducieren können. Man kann sich jedoch durch folgende Hypothese helfen, welche voraussetzt, dass die Bewegungsrichtung nach allen Seiten gleich wahrscheinlich ist. Ist nämlich α der Winkel, den die wahre Eigenbewegung c mit dem Visionsradius bildet, ist ferner s die spectrometrisch v die rein astronomisch bestimmte Eigenbewegung, so werden s und v in folgender Weise dargestellt, wenn $d\sigma$ ein Kugelelement bedeutet

$$v = c\int_0^{\pi}\sin\alpha\int d\sigma = c\int_0^{\pi}\sin^2\alpha\, d\alpha\int_0^{2\pi} d\omega = 2c\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\alpha)\, d\alpha\int_0^{2\pi} d\omega;$$

also $v = 2\pi^2 c$ und

$$s = c\int_0^{\pi}\cos\alpha\sin\alpha\, d\alpha\int_0^{2\pi} d\omega = 4\pi c\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\sin\alpha\, d\alpha;$$

$$s = 4\pi c;$$

Zur Reduction hat man also folgende Beziehungen

$$\frac{v}{c} = 2\pi^2;$$

$$\frac{s}{c} = 4\pi \quad \text{und}$$

$$\frac{v}{s} = \frac{\pi}{2};$$

Vorerst wird man sich aber bei einer Untersuchung über die Bewegung des Sonnensystems auf dasjenige Material beschränken müssen, welches uns die Ergebnisse rein astronomischer Messung liefern, da wegen der bedeutenden optischen Hilfsmittel, welche die Messung der Fixsternspectra erfordern, bis jetzt nur eine geringe Anzahl von Geschwindigkeitsbestimmungen vorliegen.

§ 1.

Im Folgenden wollen wir kurz die Methoden der Berechnung des Sonnenapex betrachten, welche bisher angewandt sind.

Einer der ersten, welcher auf die Gesetzmässigkeit, welche die Eigenbewegungen der Fixsterne befolgen, aufmerksam machte, war W. Herschel.

Den Grund für diese Erscheinung fand er in einer Bewegung unseres Sonnensystems, deren Richtung er durch ein graphisches Verfahren bestimmte.

Herschel legte durch jeden Stern in der Richtung seiner Eigenbewegung einen grössten Kreis und erhielt so zwei symmetrische sphärische Polygone von geringer Ausdehnung, deren Schwerpunkte den Apex und Antiapex der Sonnenbewegung ergaben. Diese Methode ist an sich ungenau. Sein Resultat konnte aber auch schon deswegen kein grosses Gewicht beanspruchen, weil zu jener Zeit genaue Sternkataloge fehlten und also die Beobachtungsfehler bei Sternen mit geringer Eigenbewegung die letztere übersteigen und das Resultat verfälschen konnten.

Als der Piazzische Katalog für 1800 vorlag, unternahm Bessel eine neue Bestimmung dieser Art, die sich auf 71 Sterne mit grosser Eigenbewegung gründet, gelangte aber zu keinem befriedigenden Resultate.

Die erste ausgedehntere und genauere Untersuchung über die Eigenbewegung des Sonnensystems rührt von Argelander*) her, welcher 390 Bradleysche Sterne, deren jährliche Eigenbewegung 0″.1 im Bogen des grössten Kreises überstieg, am Meridiankreise zu Åbo beobachtete und dieselben mit dem von Bessel in den Fundamenta astronomiae gegebenen Reductionen der Bradleyschen und Piazzischen Beobachtungen verglich.

Er bestimmte hieraus die Sonnenbewegung in folgender Weise:

---

*) Ueber die Eigenbewegung des Sonnensystems. Memoirs de l'Akad. Imp. des sc. à St. Pétersbourg. Tome III. 1837.

Verbindet man den Pol mit dem Stern und dem Apex, deren AR und D beziehungsweise

$$\alpha, \delta \text{ und } A, D$$

und deren Entfernung χ ist, so findet man, wenn man mit P den Winkel am Stern bezeichnet

$$\text{tang } D = \frac{\text{cotg } P \sin(\alpha - A)}{\cos \delta} + \text{tang } \delta \cos(\alpha - A).$$

Führt man $\psi = 180^0 - P$ ein, so werden die Bedingungsgleichungen für die Correction des Apex, dA und dD, von der Form sein:

$$\sin \chi \, d\psi = \frac{\cos \delta \sin(\alpha - A)}{\sin \chi} dD - \frac{\cos D}{\sin \chi} [\sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos(\alpha - A)] dA,$$

wie man erkennt, wenn man differentiiert.

Auf die Uebelstände dieser Methode hat schon Airy*) aufmerksam gemacht. Zuerst muss der Rechnung ein angenäherter Wert für den Ort des Apex zugrunde gelegt werden. Genügt dieser nicht, so muss dieselbe mit einem neuen Werte wiederholt werden. Dann aber wird der Winkel ψ bei denjenigen Sternen, welche in der Nähe des Apex sich befinden, durch eine kleine Verschiebung des letzteren wesentlich beeinflusst und sogar von $+179^0$ auf -179^0 verändert werden können.

Airy gab eine andere Methode an, welche ebenso, wie die von Argelander voraussetzt, dass der motus peculiaris kein bestimmtes Gesetz befolgt, sondern sich im Mittel aufhebt, von den vorher erwähnten Uebelständen aber frei ist.

Er bezieht die Sonnenbewegung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen x, y, z-Axe beziehungsweise nach dem Frühlingspunkte, dem Punkte im Aequator mit der $AR = 90^0$ und dem Nordpol gerichtet ist, und zerlegt nun die Sonnenbewegung in ihre 3 rechtwinkligen Componenten $X\ Y\ Z$ nach den drei Axen. Bezeichnet q die Geschwindigkeit, A und D die Rectascension und Deklination des Apex, so erhält man für $X\ Y\ Z$ die Gleichungen

*) On the Movement of the Solar System in Space. Memoirs of the R. Astr. Society vol XXVIII.

$$X = q \cos D \cos A$$
$$Y = q \cos D \sin A$$
$$Z = q \sin D;$$

Ist $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ die Eigenbewegung eines Sternes und ϱ seine Entfernung, so giebt jeder Stern zur Bestimmung von $X, Y, Z,$ sowie der Correction der Praecession Δm und Δn die Gleichungen:

$$\cos\delta\,\Delta m + \sin\alpha \sin\delta\,\Delta n + \frac{\sin\alpha}{\varrho} X - \frac{\cos\alpha}{\varrho} Y = \Delta\alpha \cos\delta;$$

$$\cos\alpha\,\Delta n + \frac{\cos\alpha \sin\delta}{\varrho} X + \frac{\sin\alpha \sin\delta}{\varrho} Y - \frac{\cos\delta}{\varrho} Z = \Delta\delta;$$

Falls das Fixsternsystem sich in einer gesetzmässigen Bewegung befindet, genügen diese Formeln nicht mehr. Auf eine solche Bewegung, nämlich die Rotation der Fixsterne um einen gemeinschaftlichen Schwerpunkt und zwar in Bahnen, deren Ebenen einander parallel sind, hat Herr Schönfeld*) Rücksicht genommen und folgende Formeln abgeleitet, in denen dl die Rotationsconstante, a, d, r_0, die galactocentrische Rectascension, Deklination und der Radiusvector der Sonne, Ω und i die Rectascension des aufsteigenden Knotens der Milchstrasse im Aequator und die gegenseitige Neigung beider Ebenen bedeutet:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha \cos\delta = {} & \cos\delta\,(\Delta m + \cos i\, dl) + \sin\alpha \sin\delta\,(\Delta n + \cos\Omega \sin i\, dl) \\ & + \frac{\sin\alpha}{\varrho}\Big[q \cos D \cos A + r_0\, dl\,(\cos i \cos d \sin a + \cos\Omega \sin i \sin d)\Big] \\ & - \frac{\cos\alpha}{\varrho}\Big[q \cos D \sin A - r_0\, dl\,(\cos i \cos d \cos a - \sin\Omega \sin i \sin d)\Big] \\ & - \cos\alpha \sin\delta \sin\Omega \sin i\, dl.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\delta = {} & \cos\alpha\,(\Delta n + \cos\Omega \sin i\, dl) \\ & + \frac{\cos\alpha \sin\delta}{\varrho}\Big[q \cos D \cos A + r_0\, dl\,(\cos i \cos d \sin a + \cos\Omega \sin i \sin d)\Big] \\ & + \frac{\sin\alpha \sin\delta}{\varrho}\Big[q \cos D \sin A - r_0\, dl\,(\cos i \cos d \cos a - \sin\Omega \sin i \sin d)\Big] \\ & - \frac{\cos\delta}{\varrho}\Big[q \sin D - r_0\, dl \sin i \cos d \cos(\alpha - \Omega)\Big] + \sin\alpha \sin\Omega \sin i\, dl.\end{aligned}$$

*) Vierteljahrsschrift der Astr. Gesellschaft XVII.

Herr Kobold*) hat eine andere, von den bisherigen ganz verschiedene Methode angewandt, um den Apex der Sonnenbewegung herzuleiten, indem er nach dem von Bessel vorgeschlagenen Verfahren die Pole der Eigenbewegung berechnet und dieselben dann in Karten einträgt. Es muss sich dann die Bewegung der Sonne dadurch kennzeichnen, dass alle Pole der Eigenbewegungen auf einem grössten Kreise liegen, dessen einer Pol die Richtung der Sonnenbewegung selbst angiebt.

Der motus peculiaris der Sterne wird ein Abweichen der Pole von dem grössten Kreise bewirken und diese Abweichung wird um so grösser sein, je mehr die Richtung der Sonnenbewegung von der des Sternes abweicht. Falls nun die eigenen Bewegungen der Sterne nur wie zufällige Fehler wirken sollen, muss die Anzahl der Pole auf zwei Halbkugeln dieselbe sein und die Dichtigkeit der Verteilung derselben sich nach einem von der Geschwindigkeit der Sonnenbewegung abhängenden Gesetze ändern. Das ist aber, wie Herr Kobold aus der Berechnung der 622 Sterne der beiden Fundamentalkataloge der astronomischen Gesellschaft findet, durchaus nicht der Fall. Teilt man nämlich die Kugel durch einen nach den bisher besten Bestimmungen gewählten parallaktischen Aequator in zwei Hälften, so ist weder die Anzahl noch die Verteilung der Pole eine solche, dass man die Sternbewegungen als gesetzlos verteilt und somit als von der Art zufälliger Fehler betrachten darf.

Denn bei der Berücksichtigung der Pole, die in einer 60^0 breiten und zum Deklinationskreise 0^0 und 180^0 symmetrisch gelegenen Zone liegen, ist die Anzahl derselben 169 oder 72% der überhaupt vorhandenen Pole, während das Verhältnis des Gürtels zur ganzen Oberfläche ist 1,840 : 4, also bei gesetzloser Verteilung nur 46% in dieselbe fallen dürften.

Kobold findet aus den Polen dieser Zone für die Deklination des Apex

$$D = + 0^0\,21'$$

bemerkt aber, dass die von der Rechnung ausgeschlossenen Pole den parallaktischen Pol einige Grade weiter nach Norden versetzen würden.

*) Astron. Nachrichten B. 125.

Diese Methode hat vor den älteren den schwerwiegenden Vorzug, dass sie nicht a priori eine Zufälligkeit in der Verteilung der Sternbewegungen verlangt, die thatsächlich nicht vorhanden zu sein scheint.

§ 2.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die gewöhnlichen Annahmen über die Richtung der Bewegung unseres Sonnensystems auf der Hypothese beruhen, dass ein Teil der Eigenbewegungen von der Bewegung der Sonne herrührt, dass die Sonne also zu den rascher bewegten Sternen gehört.

Hierfür hat man aber keinerlei Beweise, sondern man kann mit völlig gleicher Wahrscheinlichkeit behaupten, dass die Sonne ein langsam bewegter Stern ist, dass also jener Teil der Eigenbewegung von dem Zurückbleiben, nicht von dem Voreilen der Sonne herrührt. Dieses beeinflusst aber die Apexbestimmung sehr wesentlich.

Denkt man sich nämlich die Sonne ruhend, während die Fixsterne in wenig gegen einander geneigten Bahnen an ihr vorüberziehen, giebt jetzt der Sonne eine beliebige Geschwindigkeit und fügt diese Constante auch zu den Bewegungen der Fixsterne hinzu, so hat man einen Haufen von Fixsternen, der in fortschreitender Bewegung durch den Raum begriffen ist und in dem die Sonne ein langsam bewegter Stern ist.

Die Eigenbewegungen zeigen hier denselben Gang, haben aber das entgegengesetzte Vorzeichen, als in dem Falle, wo die Sonne ein rasch bewegter Stern ist, wo wir uns also die Fixsterne gegenüber der Sonne als ruhend denken und zu beiden dann eine beliebige Bewegungsconstante addieren.

Es wird also der Antiapex bei der einen Hypothese zum Apex werden, wenn wir die andere annehmen.

Auch spectral-analytische Messungen können hier nichts entscheiden, denn es findet, falls die Sonne ein langsam bewegter Stern ist, ja thatsächlich eine Annäherung der Sterne auf der einen Halbkugel, deren Pol wir jetzt mit Antiapex bezeichnen, und eine Entfernung derselben auf der anderen Halbkugel statt.

Wir werden also immer im unklaren darüber bleiben, in welcher Richtung die wahre Bewegung unserer Sonne und der anderen Fixsterne vor sich geht, und in welcher Beziehung zu dieser der Apex steht.

§ 3.

Falls irgend eine Gesetzmässigkeit in der Bewegung des Fixsternsystems vorhanden ist, werden wir die Eigenbewegungen als abhängig von dieser betrachten müssen und sie nicht als gesetzlos verteilt ansehen dürfen. Man muss daher zur Darstellung der Eigenbewegungen der Fixsterne eine Methode anwenden, welche diese Bedingung zu berücksichtigen erlaubt.

Gyldén hat deshalb die Eigenbewegungen als Functionen der Rectascension nach dem Vielfachen derselben in eine trigonometrische Reihe entwickelt. Will man die Eigenbewegungen jedoch vollständig darstellen, so wird man sie als Functionen der Rectascension und Deklination nach Kugelfunctionen entwickeln müssen und wird so über das Gesetz ihres Verlaufs eine sichere Auskunft erhalten. In diesem Falle ist man von jeder Annahme über die Verteilung der Sternbewegungen an den verschiedenen Teilen des Himmels frei und habe ich deshalb die folgende Untersuchung darauf gegründet. Es stützt sich dieselbe auf die Eigenbewegungen, welche sich in dem von Auwers neu reducierten Cataloge der von Bradley beobachteten Sterne vorfinden.

Ich habe nur die Eigenbewegungen derjenigen Sterne der Rechnung zugrunde gelegt, die sich innerhalb der Kugelzone, welche von den Parallelkreisen $\delta = -30^0$ und $\delta = +65^0$ begrenzt werden, finden, da sich jenseits dieser Grenzen nur sehr wenig Sterne vorfinden.

Bei physischen Doppelsternen ist, falls die Eigenbewegungen beider Componenten bestimmt war, nur die des helleren Sternes berücksichtigt, die des schwächeren dagegen ausgeschlossen. Es betrifft dieses 21 Bradleysche Sterne, so dass von denselben noch 3247 übrig bleiben.

Will man über die Bewegungsverhältnisse des Fixsternsystems ein Urteil gewinnen, so wird man nicht eine Reihe von Sternen untersuchen dürfen, die nach irgend einer Gesetzmässigkeit ausgewählt sind, sondern man wird sich an eine Zusammenstellung halten müssen, die durch Zufälligkeiten entstanden ist, wie z. B. der Bradleysche Catalog, und in

demselben alle Sterne, sowohl die mit grosser Eigenbewegung, als die mit sehr kleiner berücksichtigen müssen, denn nur dann ist man sicher, dass sich in den Resultaten nicht das Gesetz wiederspiegelt, welches man bei der Auswahl der Sterne zugrunde gelegt hat. Ich habe deswegen alle im Auwerschen Cataloge vorkommenden Sterne berücksichtigt. Um eine Abhängigkeit der Bewegung unseres Sonnensystems von der Entfernung der Fixsterne erkennen zu können, habe ich 2 der Anzahl der Sterne nach annähernd gleich grosse Abteilungen gebildet, wobei ich als Maass der Entfernung die Helligkeit angenommen habe und zwar umfasst die erste Abteilung innerhalb der Kugelzone 1596 Sterne der 1ten bis inclusive $5{,}9^{ten}$ Grösse, die zweite 1494 Sterne der 6ten und geringerer Grösse.

Als Maass für die Entfernung die Grösse der Eigenbewegung festzusetzen, schien mir nicht ratsam, da doch sehr wahrscheinlich die Leuchtkraft von der Entfernung unabhängig ist, während die Eigenbewegungen eine sehr complizierte und unbekannte Abhängigkeit von ihr und der Richtung nach dem Sterne befolgen.

Herr Stumpe*) hat die Fixsterne nach der Grösse ihrer Eigenbewegung in nachstehende 4 Gruppen geteilt:

I. s bis $2s$
II. $2s$ „ $4s$
III. $4s$ „ $8s$
IV. $8s$ und darüber,

wobei er $s = 0''{,}16$ als die untere Grenze der Eigenbewegung im Bogen des grössten Kreises angenommen hat.

Das Resultat des Herrn Stumpe ist zuerst deswegen anfechtbar, weil bei der Reduction der Eigenbewegung in Rectascension in Bogensekunden des grössten Kreises die Multiplikation mit $\cos\delta$ unterblieben ist. Er erhält als Rectascension des Apex ungefähr denselben Wert, wie ihn die früheren Bestimmungen ergeben. Da die tang., aus der man dieselbe zu bestimmen hat, in der Nähe von 270^0 sehr gross ist und ihr Wert sich schon beträchtlich ändern muss, ehe sich grössere Aenderungen des Winkels ergeben, so ist dieser Umstand der Uebereinstimmung günstig.

*) Ueber die Bewegung des Sonnensystems. Kiel 1890.

Herr Stumpe findet, wenn F, G, H die Componenten der Sonnenbewegung sind, aus den Gleichungen

$$F = \frac{c}{\varrho} \cos\tau \cos\sigma$$

$$G = \frac{c}{\varrho} \cos\tau \sin\sigma$$

$$H = \frac{c}{\varrho} \sin\tau$$

worin σ und τ Rectascension und Deklination des Apex bedeuten, in den 4 Gruppen für τ und σ annähernd gleiche Coordinaten, für $\frac{c}{\varrho}$ aber folgende Werte:

Gruppe I	0,140
„ II	0,295
„ III	0,608
„ IV	2,057

Aus diesen Zahlen glaubt er schliessen zu dürfen, dass die Entfernungen der Fixsterne umgekehrt proportional sind der Grösse ihrer Eigenbewegungen.

Ein solcher Schluss ist jedoch nicht erlaubt, sondern es ergiebt sich aus den Gleichungen nur das an sich merkwürdige Resultat, dass man fast den gleichen Apex findet aus Sterngruppen, die nach der Grösse ihrer Eigenbewegung gebildet sind.

Die Werte von $\frac{c}{\varrho}$ aber hängen nur von der mittleren Grösse der Eigenbewegung ab, die bei der Berechnung der Sonnencomponenten den einzelnen Gruppen zugrunde gelegt ist.

Für jede der von mir in vorhin bemerkter Weise gebildeten Abteilungen habe ich nun folgendes Verfahren eingeschlagen.

Die Himmelskugel wurde in Streifen von je 2 Stunden Rectascension zerlegt und in jedem dieser Streifen die Sterne nach der Deklination geordnet. Darauf wurde die Eigenbewegung von je 6 Sternen, in Rectascension und Deklination gesondert, zusammengefasst.

Es ist jedoch zu bemerken, dass bei der Verwandlung der Zeitsekunden in Rectascension in Bogensekunden letztere sich, wie es bei einer Entwickelung nach Kugelfunctionen notwendig ist, auf die Kugel

beziehen und also die Zeitsekunden nicht mit $15 . \cos \delta$ sondern nur mit 15 multipliciert werden müssen.

Ich führe die von mir gefundenen Gruppen für die Zone $\delta = -30^0$ bis $\delta = +65^0$ an, wobei die Zahlen die mittlere jährliche Eigenbewegung in Tausendteilen der Bogensekunde angeben.

Tafel I (im Anhange).

Von diesen Werten darf man annehmen, dass sie ein gleiches Gewicht besitzen. Ich habe sie als Ordinaten, die mittleren Deklinationen der Gruppen als Abscissen auf ein Coordinatensystem abgetragen und die so erhaltenen Punkte durch Curven ausgeglichen. Man erhält also für jede Abteilung 12 Curven in Rectascension und ebensoviele in Deklination. Um den Gang derselben möglichst genau festzustellen, habe ich jede Curve 4 mal gezeichnet und ihnen folgende Werte entnommen.

Tafel II.

Diese Curven habe ich nun in der Weise unter einander ausgeglichen, dass ich als Abscissen die Rectascension I^h, III^h .... XXIII^h und als Ordinaten die den vorigen Curven entnommenen Eigenbewegungen in Intervallen von 10^0 von $\delta = -30^0$ bis $\delta = +65^0$ aufgetragen habe, sodass man für jede Abteilung je 10 Curven in Rectascension und Deklination erhält, deren Gang durch folgende Zahlen dargestellt wird.

Tafel III.

Diesen Curven habe ich dann wiederum die entsprechenden Werte zur Construction der zuerst beschriebenen Curven, in denen die Ordinaten die Eigenbewegung, die Abscissen die Deklination darstellen, entnommen, noch einmal ausgeglichen und aus ihnen die der Rechnung zugrunde liegenden Zahlenwerte bestimmt.

Die so gefundenen mittleren Eigenbewegungen habe ich nun nach der Fr. Neumannschen*) Methode unter Benützung der von Herrn Seeliger**) entworfenen Tafeln, welche letztere die rechnerische Arbeit

*) Vorlesungen über die Theorie des Potentiales . . herausg. von C. Neumann, Leipzig 1887.

**) Ueber die interpolatorische Darstellung einer Function durch eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe. Sitzungsber. der math.-phys. Cl. d. k. b. Akad. d. W. 1890 Bd. XX Heft IV.

bei der Anwendung dieser Methode ausserordentlich vereinfachen, nach Kugelfunctionen entwickelt.

§ 4.

Der Gang dieser Methode ist kurz folgender.

Haben wir eine Function $f(\mu\varphi)$, die sich über die ganze Kugel erstreckt, und kennen wir soviel Werte derselben auf der Kugel, dass wir für jeden beliebigen Ort den zugehörigen Wert interpolieren können, so können wir auf Grund von $2pq$ Punkten, in denen $2p$ aequidistante Meridiane von q Parallelkreisen geschnitten werden, die Function nach Kugelfunctionen entwickeln und zwar bis zur Kugelfunction p^{ter} Ordnung.

$$f(\mu\varphi) = Y_0 + Y_1(\mu,\varphi) + Y_2(\mu,\varphi) + \cdots + Y_p(\mu,\varphi)$$

Besonders einfach wird diese Entwickelung, wenn wir $q = p+1$ setzen und dadurch die Lage des Parallelkreises einem bestimmten Gesetze unterwerfen, dass nämlich die Parameter $\mu_1, \mu_2 \cdots \mu_{p+1}$ identisch sind mit den $p+1$ Wurzeln der Gleichung

$$P_{p+1} = 0$$

wo P die Laplace-Legendre'sche Kugelfunction von einer Variabelen ist.

Haben wir also $2p$ aequidistante Meridiane mit den Azimuten

$$\varphi = 0, \frac{\pi}{p}, \frac{2\pi}{p}, \cdots (2p-1)\frac{\pi}{p}$$

und sind uns $p+1$ Parallelkreise mit den Parametern

$$\mu = \mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots \mu_{p+1}$$

gegeben, so müssen wir die Werte der Functionen

$$\begin{array}{lllll}
f(\mu_1, 0) & f\left(\mu_1, \frac{\pi}{p}\right), & f\left(\mu_1, \frac{2\pi}{p}\right) & \cdots & f\left(\mu_1, (2p-1)\frac{\pi}{p}\right) \\
f(\mu_2, 0) & f\left(\mu_2, \frac{\pi}{p}\right), & f\left(\mu_2, \frac{2\pi}{p}\right) & \cdots & f\left(\mu_2, (2p-1)\frac{\pi}{p}\right) \\
— & — & — & — & — \\
f(\mu_{p+1}, 0) & f\left(\mu_{p+1}, \frac{\pi}{p}\right), & f\left(\mu_{p+1}, \frac{2\pi}{p}\right) & \cdots & f\left(\mu_{p+1}, (2p-1)\frac{\pi}{p}\right)
\end{array}$$

kennen, um die Function nach Kugelfunctionen entwickeln zu können.

Diese sind also entweder durch Beobachtungen zu bestimmen oder, wie in unserem Falle, direct durch Interpolation abzuleiten. Haben wir diese Werte, so können wir die unbekannte Function in folgender Weise darstellen

$$
\begin{aligned}
f(\mu, \varphi) = {} & A_{00} P_0(\mu) \\
& + A_{10} P_{10}(\mu) + \begin{bmatrix} A_{11} \cos\varphi \\ + B_{11} \sin\varphi \end{bmatrix} P_{11}(\mu) \\
& + A_{20} P_{20}(\mu) + \begin{bmatrix} A_{21} \cos\varphi \\ + B_{21} \sin\varphi \end{bmatrix} P_{21}(\mu) + \begin{bmatrix} A_{22} \cos 2\varphi \\ + B_{22} \sin 2\varphi \end{bmatrix} P_{22}(\mu) \\
& \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\
& + A_{p0} P_{p0}(\mu) + \begin{bmatrix} A_{p1} \cos\varphi \\ + B_{p1} \sin\varphi \end{bmatrix} P_{p1}(\mu) + \begin{bmatrix} A_{pp} \cos p\varphi \\ + B_{pp} \sin p\varphi \end{bmatrix} P_{pp}(\mu).
\end{aligned}
$$

worin die A und B die $2p+1$ willkürlichen Constanten sind und

$$P_{ni} = (1-\mu)^{\frac{i}{2}} \frac{d^i P^n_{(\mu)}}{d\mu^i}$$

Unsere Aufgabe ist es, die in dieser Formel enthaltenen Constanten $A_{ni}\, B_{ni}$ zu bestimmen.

Das letzte Glied $B_{pp} \sin p\varphi\, P_{pp}(\mu)$ wird durchweg verschwinden, da $\sin p\varphi = 0$ ist.

Wir berechnen nun zuerst die intermediären Constanten

$$C_i,\ S_i,$$

mit deren Hülfe wir dann die A und B bestimmen, aus den Formeln

$$\varepsilon_i\, p\, C_i(\mu_\lambda) = \sum_{\nu=0}^{2p-1} f\left(\mu_\lambda, \nu\frac{\pi}{p}\right) \cos \nu \frac{i\pi}{p}$$

$$p\, S_i(\mu_\lambda) = \sum_{\nu=0}^{2p-1} f\left(\mu_\lambda, \nu\frac{\pi}{p}\right) \sin \nu \frac{i\pi}{p}.$$

worin $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots \varepsilon_p = 1$

$\varepsilon_0 = \varepsilon_p = 2$

für $\lambda = 1, 2, \cdots p+1$

und $i = 0, 1, 2 \cdots p$.

Für die gesuchten Constanten A_{ni} und B_{ni} ergiebt sich dann

$$A_{ni} = \frac{2n+1}{2} \frac{\Pi(n-i)}{\Pi(n+i)} \sum_{1}^{p+1\lambda} a_\lambda P_{ni}(\mu_\lambda) C_i(\mu_\lambda)$$

$$B_{ni} = \frac{2n+1}{2} \frac{\Pi(n-i)}{\Pi(n+i)} \sum_{1}^{p+1\lambda} a_\lambda P_{ni}(\mu_\lambda) S_i(\mu_\lambda)$$

worin $\Pi(\lambda) = 1.2.3 \cdots \lambda$ bedeutet und die Zahlen a sich aus der Auflösung des Systems folgender linearen Gleichungen ergeben

$$a_1 \mu_1^\lambda + a_2 \mu_2^\lambda + \cdots + a_{p+1} \mu_{p+1}^\lambda = a_\lambda$$

$$\lambda = 0, 1 \cdots p; \; a_\lambda = \int_{-1}^{+1} x^\lambda \, dx;$$

Nun setzt Herr Seeliger

$$\mathfrak{A}_{ni} = \frac{2n+1}{2} \frac{\Pi(n-i)}{\Pi(n+i)} a_\lambda P_{ni}(\mu_\lambda)$$

und es wird dann einfach

$$A_{ni} = \sum_{1}^{p+1\lambda} \mathfrak{A}_{ni}(\mu_\lambda) C_i(\mu_\lambda);$$

$$B_{ni} = \sum_{1}^{p+1\lambda} \mathfrak{A}_{ni}(\mu_\lambda) S_i(\mu_\lambda).$$

Die Zahlen $\mathfrak{A}_{ni}$ die man ein für alle Mal für bestimmte Werte von p berechnen und tabellarisch unterbringen kann, sind von Herrn Seeliger berechnet und gebe ich die Tafel für $p+1 = 7$, die meiner Rechnung zugrunde liegt, mit seiner gütigen Erlaubnis im Anhange.

§ 5.

Nennt man Θ die Poldistanz, so ist die Lage der Parallelkreise für die Kugelfunctionen 6ter Ordnung in folgender Weise bestimmt:

$$\begin{aligned}
\Theta_7 &= 18^0\ 21'\ 28''3 \\
\Theta_6 &= 42^0\ \ 8'\ 16''8 \\
\Theta_5 &= 66^0\ \ 3'\ 21''2 \\
\Theta_4 &= 90^0 \\
\Theta_3 &= 113^0\ 56'\ 38''8 \\
\Theta_2 &= 137^0\ 51'\ 43''2 \\
\Theta_1 &= 161^0\ 38'\ 31''7
\end{aligned}$$

Entwickelt man aber die Werte einer Kugelzone nach Kugelfunctionen, so hat man folgende Transformation vorzunehmen.

Man setzt

$$\Theta_i = \frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{\vartheta_b - \vartheta_a} \cdot \pi$$

wo ϑ_a und ϑ_b die Nordpolardistanzen der beiden die Zone begrenzenden Parallelkreise sind. Es wird dann

$$\vartheta_i = \frac{\Theta_i (\vartheta_b - \vartheta_a)}{\pi} + \vartheta_a$$

In unserem Falle ist aber

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_a &= 0{,}43633 \\ \vartheta_b &= 2{,}09440 \end{aligned}\right\} \text{ im Bogen gemessen.}$$

Daraus ergiebt sich

$$\vartheta_i = 0{,}5277\ \Theta_i + 0{,}4363$$

Es werden somit die für unsere Kugelzone transformierten Polardistanzen

$$\begin{aligned} \vartheta_7 &= 34.^{0}7 \\ \vartheta_6 &= 47.3 \\ \vartheta_5 &= 59.9 \\ \vartheta_4 &= 72.5 \\ \vartheta_3 &= 85.1 \\ \vartheta_2 &= 97.7 \\ \vartheta_1 &= 110.3 \end{aligned}$$

Für die Schnittpunkte dieser Parallelkreise mit den Meridianen sind also die zugehörigen Werte aus den früher besprochenen Schlusscurven zu entnehmen.

Ich habe folgende gefunden:

Abt. I. A.R.

	I^h	III^h	V^h	VII^h	IX^h	XI^h	XIII^h	XV^h	XVII^h	XIX^h	XXI^h	XXIII^h
μ_1	+ 4	−14	−31	−46	− 64	− 89	−106	− 76	−46	−21	+ 9	+24
μ_2	+10	− 2	−18	−35	− 56	− 84	−104	− 73	−39	−10	+19	+33
μ_3	+16	+ 7	− 8	−30	− 57	− 90	−115	− 79	−38	− 2	+25	+40
μ_4	+20	+15	− 2	−32	− 67	−105	−128	− 94	−45	+ 2	+29	+46
μ_5	+26	+23	− 2	−40	− 86	−125	−147	−113	−53	− 1	+35	+54
μ_6	+31	+19	− 7	−50	−100	−146	−166	−131	−63	− 5	+42	+66
μ_7	+42	+18	−18	−60	−120	−188	−205	−163	−76	− 9	+52	+86

Abt. I. D.

	I	III	V	VII	IX	XI	XIII	XV	XVII	XIX	XXI	XXIII
μ_1	+35	+32	+25	+ 6	−10	+ 3	+22	+53	+65	+56	+43	+38
μ_2	+23	+21	+18	+ 9	− 2	− 2	+14	+36	+50	+44	+33	+26
μ_3	− 6	− 8	−10	−12	−17	−20	−15	− 1	+15	+19	+10	− 2
μ_4	−30	−33	−35	−37	−46	−45	−41	−31	−16	0	− 4	−20
μ_5	−42	−45	−48	−54	−64	−61	−51	−39	−25	− 9	−16	−26
μ_6	−38	−42	−51	−58	−64	−52	−35	−17	− 4	+ 7	− 2	−22
μ_7	−26	−36	−46	−53	−57	−41	−12	+12	+27	+29	+13	−11

Abt. II. A. R.

	I	III	V	VII	IX	XI	XIII	XV	XVII	XIX	XXI	XXIII
μ_1	− 9	−17	−26	−41	−56	−71	−70	−56	−37	−19	−10	− 4
μ_2	+ 1	− 6	−17	−33	−55	−75	−77	−58	−36	−16	− 4	+ 2
μ_3	+10	+ 2	−10	−30	−59	−81	−80	−60	−35	−14	+ 4	+18
μ_4	+20	+ 8	− 6	−32	−66	−89	−81	−56	−33	−11	+10	+31
μ_5	+27	+12	− 3	−33	−70	−93	−74	−52	−30	−11	+10	+33
μ_6	+25	+11	− 4	−30	−66	−85	−71	−51	−30	−10	+ 9	+33
μ_7	+19	+ 6	−10	−30	−57	−75	−66	−51	−30	− 4	+14	+38

Abt. II. D.

	I	III	V	VII	IX	XI	XIII	XV	XVII	XIX	XXI	XXIII
μ_1	+20	+27	+26	+31	+17	+16	+13	+13	+22	+31	+26	+15
μ_2	+14	+13	+13	+22	+14	+10	+ 7	+ 6	+13	+25	+23	+14
μ_3	− 1	− 7	− 5	+10	+ 5	0	− 8	−11	− 7	+ 8	+14	+ 4
μ_4	−18	−28	−20	− 6	−11	−10	−20	−31	−27	−11	− 8	−11
μ_5	−24	−31	−28	−18	−14	−14	−21	−35	−30	−17	−10	−20
μ_6	−24	−35	−30	−22	−18	−19	−22	−25	−22	− 9	− 4	−14
μ_7	−24	−35	−30	−22	−20	−20	−21	−24	−22	− 9	− 3	−14

In den Tafeln für D ist in südlichen Deklinationen das Vorzeichen geändert.

Aus diesen Werten erhält man die folgenden intermediären Constanten C_i und S_i.

Abt. I. A. R.

$C_0(\mu_1) = -38.0;$	$C_1(\mu_1) = +48.2;$	$C_2(\mu_1) = -7.8;$	$C_3(\mu_1) = +3.5;$
$C_0(\mu_2) = -29.9;$	$C_1(\mu_2) = +53.4;$	$C_2(\mu_2) = -10.8;$	$C_3(\mu_2) = +3.0;$
$C_0(\mu_3) = -27.6;$	$C_1(\mu_3) = +62.3;$	$C_2(\mu_3) = -16.5;$	$C_3(\mu_3) = +3.2;$
$C_0(\mu_4) = -30.1;$	$C_1(\mu_4) = +73.4;$	$C_2(\mu_4) = -17.4;$	$C_3(\mu_4) = +1.5;$
$C_0(\mu_5) = -35.7;$	$C_1(\mu_5) = +88.6;$	$C_2(\mu_5) = -17.8;$	$C_3(\mu_5) = +0.2;$
$C_0(\mu_6) = -42.5;$	$C_1(\mu_6) = +101.6;$	$C_2(\mu_6) = -17.2;$	$C_3(\mu_6) = -0.2;$
$C_0(\mu_7) = -53.4;$	$C_1(\mu_7) = +126.1;$	$C_2(\mu_7) = -22.6;$	$C_3(\mu_7) = +2.8;$

$C_4(\mu_1) = -4.2;$	$C_5(\mu_1) = +2.0;$	$C_6(\mu_1) = -1.0;$	$S_1(\mu_1) = -16.7;$
$C_4(\mu_2) = -4.8;$	$C_5(\mu_2) = +0.6;$	$C_6(\mu_2) = -1.4;$	$S_1(\mu_2) = -15.8;$
$C_4(\mu_3) = -3.5;$	$C_5(\mu_3) = 0;$	$C_6(\mu_3) = -1.9;$	$S_1(\mu_3) = -15.8;$
$C_4(\mu_4) = -4.4;$	$C_5(\mu_4) = -1.3;$	$C_6(\mu_4) = -1.9;$	$S_1(\mu_4) = -16.2;$
$C_4(\mu_5) = -4.7;$	$C_5(\mu_5) = -2.3;$	$C_6(\mu_5) = -2.1;$	$S_1(\mu_5) = -20.1;$
$C_4(\mu_6) = -4.8;$	$C_5(\mu_6) = -2.9;$	$C_6(\mu_6) = -1.3;$	$S_1(\mu_6) = -25.3;$
$C_4(\mu_7) = -4.4;$	$C_5(\mu_7) = -5.4;$	$C_6(\mu_7) = -0.8;$	$S_1(\mu_7) = -34.6;$

$S_2(\mu_1) = -4.8;$	$S_3(\mu_1) = -4.3;$	$S_4(\mu_1) = +1.6;$	$S_5(\mu_1) = -0.1;$
$S_2(\mu_2) = -5.9;$	$S_3(\mu_2) = -3.5;$	$S_4(\mu_2) = +0.5;$	$S_5(\mu_2) = -0.2;$
$S_2(\mu_3) = -5.1;$	$S_3(\mu_3) = -2.7;$	$S_4(\mu_3) = +1.3;$	$S_5(\mu_3) = -0.7;$
$S_2(\mu_4) = -4.3;$	$S_3(\mu_4) = -1.3;$	$S_4(\mu_4) = -1.5;$	$S_5(\mu_4) = -1.6;$
$S_2(\mu_5) = -3.4;$	$S_3(\mu_5) = -0.7;$	$S_4(\mu_5) = -2.2;$	$S_5(\mu_5) = 0;$
$S_2(\mu_6) = -6.3;$	$S_3(\mu_6) = -2.8;$	$S_4(\mu_6) = -2.9;$	$S_5(\mu_6) = -0.2;$
$S_2(\mu_7) = -10.1;$	$S_3(\mu_7) = -7.0;$	$S_4(\mu_7) = -2.6;$	$S_5(\mu_7) = -0.1;$

Abt. I. D.

$C_0(\mu_1) = +30.7;$	$C_1(\mu_1) = +5.4;$	$C_2(\mu_1) = +1.4;$	$C_3(\mu_1) = 0;$
$C_0(\mu_2) = +22.5;$	$C_1(\mu_2) = +3.6;$	$C_2(\mu_2) = -1.2;$	$C_3(\mu_2) = -0.7;$
$C_0(\mu_3) = -3.9;$	$C_1(\mu_3) = +3.3;$	$C_2(\mu_3) = -11.1;$	$C_3(\mu_3) = +1.5;$
$C_0(\mu_4) = -28.2;$	$C_1(\mu_4) = +7.1;$	$C_2(\mu_4) = -20.3;$	$C_3(\mu_4) = -2.0;$
$C_0(\mu_5) = -40.0;$	$C_1(\mu_5) = +7.8;$	$C_2(\mu_5) = -21.2;$	$C_3(\mu_5) = -2.7;$
$C_0(\mu_6) = -31.5;$	$C_1(\mu_6) = +1.5;$	$C_2(\mu_6) = -24.0;$	$C_3(\mu_6) = -3.0;$
$C_0(\mu_7) = -16.8;$	$C_1(\mu_7) = -3.9;$	$C_2(\mu_7) = -22.2;$	$C_3(\mu_7) = -2.2;$

$C_4(\mu_1) = -0.9;$	$C_5(\mu_1) = +1.1;$	$C_6(\mu_1) = -0.7;$	$S_1(\mu_1) = -26.2;$
$C_4(\mu_2) = +1.3;$	$C_5(\mu_2) = -0.3;$	$C_6(\mu_2) = +0.2;$	$S_1(\mu_2) = -19.1;$
$C_4(\mu_3) = -0.4;$	$C_5(\mu_3) = +0.1;$	$C_6(\mu_3) = +0.1;$	$S_1(\mu_3) = -16.4;$
$C_4(\mu_4) = -1.2;$	$C_5(\mu_4) = -0.5;$	$C_6(\mu_4) = -0.5;$	$S_1(\mu_4) = -17.2;$
$C_4(\mu_5) = +1.0;$	$C_5(\mu_5) = -0.6;$	$C_6(\mu_5) = -1.0;$	$S_1(\mu_5) = -21.2;$
$C_4(\mu_6) = +0.5;$	$C_5(\mu_6) = 0;$	$C_6(\mu_6) = -0.8;$	$S_1(\mu_6) = -31.2;$
$C_4(\mu_7) = +1.3;$	$C_5(\mu_7) = -5.6;$	$C_6(\mu_7) = -0.1;$	$S_1(\mu_7) = -34.8;$

$S_2(\mu_1) = +14.9;$	$S_3(\mu_1) = -1.0;$	$S_4(\mu_1) = -2.0;$	$S_5(\mu_1) = +0.28;$
$S_2(\mu_2) = +10.1;$	$S_3(\mu_2) = -1.3;$	$S_4(\mu_2) = -0.6;$	$S_5(\mu_2) = +0.23;$
$S_2(\mu_3) = +\ 3.6;$	$S_3(\mu_3) = +1.0;$	$S_4(\mu_3) = +0.1;$	$S_5(\mu_3) = +0.27;$
$S_2(\mu_4) = +\ 0.02;$	$S_3(\mu_4) = +1.7;$	$S_4(\mu_4) = +0.3;$	$S_5(\mu_4) = +0.35;$
$S_2(\mu_5) = +\ 1.5;$	$S_3(\mu_5) = +0.7;$	$S_4(\mu_5) = -0.6;$	$S_5(\mu_5) = -0.67;$
$S_2(\mu_6) = +\ 3.7;$	$S_3(\mu_6) = +0.5;$	$S_4(\mu_6) = +0.6;$	$S_5(\mu_6) = +0.33;$
$S_2(\mu_7) = +\ 7.7;$	$S_3(\mu_7) = +0.7;$	$S_4(\mu_7) = +0.5;$	$S_5(\mu_7) = +6.5\ ;$

Abt. II. A.R.

$C_0(\mu_1) = -42.2;$	$C_1(\mu_1) = +30.6;$	$C_2(\mu_1) = -4.7;$	$C_3(\mu_1) = +0.8;$
$C_0(\mu_2) = -31.2;$	$C_1(\mu_2) = +39.3;$	$C_2(\mu_2) = -6.7;$	$C_3(\mu_2) = +1.3;$
$C_0(\mu_3) = -29.5;$	$C_1(\mu_3) = +45.7;$	$C_2(\mu_3) = -5.7;$	$C_3(\mu_3) = +0.3;$
$C_0(\mu_4) = -25.4;$	$C_1(\mu_4) = +52.4;$	$C_2(\mu_4) = -3.9;$	$C_3(\mu_4) = -0.3;$
$C_0(\mu_5) = -23.7;$	$C_1(\mu_5) = +53.2;$	$C_2(\mu_5) = -1.2;$	$C_3(\mu_5) = -1.0;$
$C_0(\mu_6) = -22\,4;$	$C_1(\mu_6) = +50.4;$	$C_2(\mu_6) = -1.1;$	$C_3(\mu_6) = -0.8;$
$C_0(\mu_7) = -20.5;$	$C_1(\mu_7) = +46.3;$	$C_2(\mu_7) = +2.2;$	$C_3(\mu_7) = -1.0;$
$C_4(\mu_1) = -0.1:$	$C_5(\mu_1) = -0.7;$	$C_6(\mu_1) = 0\ ;$	$S_1(\mu_1) = -11.5;$
$C_4(\mu_2) = +0.1;$	$C_5(\mu_2) = +0.2;$	$C_6(\mu_2) = 0\ ;$	$S_1(\mu_2) = -\ 9.5;$
$C_4(\mu_3) = -0.9;$	$C_5(\mu_3) = -0.9;$	$C_6(\mu_3) = -0.4;$	$S_1(\mu_3) = -10.8;$
$C_4(\mu_4) = -0.6;$	$C_5(\mu_4) = -1.1;$	$C_6(\mu_4) = -0.5;$	$S_1(\mu_4) = -15.4;$
$C_4(\mu_5) = +0.9;$	$C_5(\mu_5) = -1.6;$	$C_6(\mu_5) = -0.3;$	$S_1(\mu_5) = -16.5;$
$C_4(\mu_6) = +0.9;$	$C_5(\mu_6) = -1.6;$	$C_6(\mu_6) = -0.4;$	$S_1(\mu_6) = -15.0;$
$C_4(\mu_7) = +0\ 1;$	$C_5(\mu_7) = -2.8;$	$C_6(\mu_7) = -1.2;$	$S_1(\mu_7) = -17.2;$
$S_2(\mu_1) = +1.2;$	$S_3(\mu_1) = -1.0;$	$S_4(\mu_1) = -0.2;$	$S_5(\mu_1) = -0.5;$
$S_2(\mu_2) = +1.9;$	$S_3(\mu_2) = -1.3;$	$S_4(\mu_2) = +0.5;$	$S_5(\mu_2) = -0.4;$
$S_2(\mu_3) = +1.9;$	$S_3(\mu_3) = -1.8;$	$S_4(\mu_3) = -0.6;$	$S_5(\mu_3) = 0\ ;$
$S_2(\mu_4) = +3.8;$	$S_3(\mu_4) = -5.8;$	$S_4(\mu_4) = -1.0;$	$S_5(\mu_4) = -1.1;$
$S_2(\mu_5) = +6.7;$	$S_3(\mu_5) = -6.7;$	$S_4(\mu_5) = -0.9;$	$S_5(\mu_5) = -1.2;$
$S_2(\mu_6) = +3.4;$	$S_3(\mu_6) = -6.0;$	$S_4(\mu_6) = -1.7;$	$S_5(\mu_6) = -1.0;$
$S_2(\mu_7) = -0.7;$	$S_3(\mu_7) = -5.0;$	$S_4(\mu_7) = -3.3;$	$S_5(\mu_7) = -1.6;$

Abt. II. D.

$C_0(\mu_1) = +21.4;$	$C_1(\mu_1) = +4.1;$	$C_2(\mu_1) = -2.9;$	$C_3(\mu_1) = -1.0;$
$C_0(\mu_2) = +14.4;$	$C_1(\mu_2) = +3.7;$	$C_2(\mu_2) = -6.1;$	$C_3(\mu_2) = -0.3;$
$C_0(\mu_3) = +\ 0.2;$	$C_1(\mu_3) = +2.7;$	$C_2(\mu_3) = -6.2;$	$C_3(\mu_3) = -3.3;$
$C_0(\mu_4) = -14.4;$	$C_1(\mu_4) = +1.2;$	$C_2(\mu_4) = -5.6;$	$C_3(\mu_4) = -1.3;$
$C_0(\mu_5) = -21.8;$	$C_1(\mu_5) = -0.9;$	$C_2(\mu_5) = -4.6;$	$C_3(\mu_5) = -1.5;$
$C_0(\mu_6) = -20.3;$	$C_1(\mu_6) = -1.0;$	$C_2(\mu_6) = -4.7;$	$C_3(\mu_6) = -1.3;$
$C_0(\mu_7) = -20.5;$	$C_1(\mu_7) = -1.0;$	$C_2(\mu_7) = -4.8;$	$C_3(\mu_7) = -2.2;$

$C_4(\mu_1) = -2.3$;	$C_5(\mu_1) = +0.4$;	$C_6(\mu_1) = -1.5$;	$S_1(\mu_1) = +0.5$;
$C_4(\mu_2) = +0.5$;	$C_5(\mu_2) = +0.6$;	$C_6(\mu_2) = -1.0$;	$S_1(\mu_2) = -0.5$;
$C_4(\mu_3) = -1.2$;	$C_5(\mu_3) = +0.6$;	$C_6(\mu_3) = -1.0$;	$S_1(\mu_3) = -0.7$;
$C_4(\mu_4) = +4.4$;	$C_5(\mu_4) = +0.8$;	$C_6(\mu_4) = -1.2$;	$S_1(\mu_4) = +1.7$;
$C_4(\mu_5) = +3.2$;	$C_5(\mu_5) = -0.1$;	$C_6(\mu_5) = -1.3$;	$S_1(\mu_5) = +0.3$;
$C_4(\mu_6) = +1.7$;	$C_5(\mu_6) = +0.5$;	$C_6(\mu_6) = +0.7$;	$S_1(\mu_6) = -7.0$;
$C_4(\mu_7) = +2\,2$;	$C_5(\mu_7) = +0.7$;	$C_6(\mu_7) = +0.7$;	$S_1(\mu_7) = -7.0$;

$S_2(\mu_1) = +2.0$;	$S_3(\mu_1) = +2.5$;	$S_4(\mu_1) = +0.6$;	$S_5(\mu_1) = +2.0$;
$S_2(\mu_2) = -2.3$;	$S_3(\mu_2) = +1.0$;	$S_4(\mu_2) = +0.9$;	$S_5(\mu_2) = +1.7$;
$S_2(\mu_3) = -7.7$;	$S_3(\mu_3) = -0.5$;	$S_4(\mu_3) = +1.3$;	$S_5(\mu_3) = +1.4$;
$S_2(\mu_4) = -9.5$;	$S_3(\mu_4) = -0.2$;	$S_4(\mu_4) = -1.4$;	$S_5(\mu_4) = +0.2$;
$S_2(\mu_5) = -9.3$;	$S_3(\mu_5) = +1.8$;	$S_4(\mu_5) = +0.3$;	$S_5(\mu_5) = +1.0$;
$S_2(\mu_6) = -8.0$;	$S_3(\mu_6) = 0$;	$S_4(\mu_6) = +0.4$;	$S_5(\mu_6) = -0.1$;
$S_2(\mu_7) = -7.8$;	$S_3(\mu_7) = -0.5$;	$S_4(\mu_7) = +0.9$;	$S_5(\mu_7) = -0.1$;

Hieraus ergeben sich folgende Coeffizienten A_{ni} und B_{ni} der Kugelfunctionsentwickelung.

Abt. I. A.R.

$A_{00} = -34.35$;	$A_{42} = -1.03$;	$A_{63} = -0.0035$;	$B_{43} = -0.04$;
$A_{10} = -8.66$;	$A_{43} = -0.05$;	$A_{64} = -0.0047$;	$B_{44} = -0.0076$;
$A_{11} = +89.71$;	$A_{44} = -0.054$;	$A_{65} = -0.00056$;	$B_{51} = -2.11$;
$A_{20} = -10.65$;	$A_{50} = -0.49$;	$A_{66} = -0.00024$;	$B_{52} = -0.09$;
$A_{21} = +16.73$;	$A_{51} = +7.05$;	$B_{11} = -21.83$;	$B_{53} = -0.056$;
$A_{22} = -6.84$;	$A_{52} = -0.21$;	$B_{21} = -3.23$;	$B_{54} = -0.001$;
$A_{30} = +0.99$;	$A_{53} = +0.014$;	$B_{22} = -1.95$;	$B_{55} = -0.0011$;
$A_{31} = +15.61$;	$A_{54} = -0.0019$;	$B_{31} = -5.18$;	$B_{61} = -0.77$;
$A_{32} = -0.40$;	$A_{55} = -0.00152$;	$B_{32} = -0.43$;	$B_{62} = -0.14$;
$A_{33} = +0.138$;	$A_{60} = -1.28$;	$B_{33} = -0.28$;	$B_{63} = -0.01$;
$A_{40} = -3.67$;	$A_{61} = +3.13$;	$B_{41} = -1.28$;	$B_{64} = -0.0026$;
$A_{41} = +7.62$;	$A_{62} = -0.198$;	$B_{42} = -0.39$;	$B_{65} = -0.00005$;

Abt. I. D.

$A_{00} = -14.6$;	$A_{22} = -6.96$;	$A_{40} = -2.00$;	$A_{50} = +2.23$;
$A_{10} = -34.0$;	$A_{30} = +10.89$;	$A_{41} = -1.47$;	$A_{51} = +0.03$;
$A_{11} = +5.9$;	$A_{31} = -1.76$;	$A_{42} = -0.33$;	$A_{52} = -0.42$;
$A_{20} = +27.14$;	$A_{32} = -1.63$;	$A_{43} = -0.062$;	$A_{53} = -0.018$;
$A_{21} = 0$;	$A_{33} = -0.11$;	$A_{44} = -0.003$;	$A_{54} = +0.0016$;

$A_{55} = -0.0050$; $A_{66} = -0.00006$; $B_{41} = -0.71$; $B_{54} = -0.0004$;
$A_{60} = -2.38$; $B_{11} = -24.17$; $B_{42} = +0.66$; $B_{55} = 0$;
$A_{61} = -0.26$; $B_{21} = -3.37$; $B_{43} = +0.008$; $B_{61} = +0.14$;
$A_{62} = -0.21$; $B_{22} = +1.15$; $B_{44} = 0$; $B_{62} = +0.182$;
$A_{63} = +0.011$; $B_{31} = -6.88$; $B_{51} = -2.66$; $B_{63} = +0.0106$;
$A_{64} = +0.0020$; $B_{32} = -0.41$; $B_{52} = -0.136$; $B_{64} = -0.0004$;
$A_{65} = -0.0010$; $B_{33} = +0.08$; $B_{53} = -0.0011$; $B_{65} = -0.0001$;

Abt. II. A.R.

$A_{00} = -26.8$; $A_{42} = -0.16$; $A_{63} = -0.005$; $B_{43} = -0.081$;
$A_{10} = +7.0$; $A_{43} = -0.028$; $A_{64} = +0.0009$; $B_{44} = -0.011$;
$A_{11} = +57.0$; $A_{44} = -0.003$; $A_{65} = -0.0002$; $B_{51} = -1.6$;
$A_{20} = -3.4$; $A_{50} = +3.1$; $A_{66} = -0.00015$; $B_{52} = -0.09$;
$A_{21} = +4.0$; $A_{51} = +2.6$; $B_{11} = -16.3$; $B_{53} = -0.020$;
$A_{22} = -1.5$; $A_{52} = +0.065$; $B_{21} = -2.5$; $B_{54} = -0.0021$;
$A_{30} = -1.8$; $A_{53} = +0.003$; $B_{22} = +1.56$; $B_{55} = -0.0011$;
$A_{31} = +5.4$; $A_{54} = +0.003$; $B_{31} = -1.77$; $B_{61} = -0.01$;
$A_{32} = +0.52$; $A_{55} = -0.0016$; $B_{32} = +0.32$; $B_{62} = -0.017$;
$A_{33} = -0.023$; $A_{60} = -2.4$; $B_{33} = -0.244$; $B_{63} = -0.003$;
$A_{40} = -1.8$; $A_{61} = +0.7$; $B_{41} = +0.60$; $B_{64} = -0.0016$;
$A_{41} = +1.0$; $A_{62} = -0.037$; $B_{42} = -0.073$; $B_{65} = -0.0002$;

Abt. II. D.

$A_{00} = -8.4$; $A_{42} = -0.25$; $A_{63} = -0.007$; $B_{43} = -0.023$;
$A_{10} = -23.4$; $A_{43} = +0.014$; $A_{64} = -0.0013$; $B_{44} = +0.001$;
$A_{11} = +1.33$; $A_{44} = +0.028$; $A_{65} = -0.0001$; $B_{51} = -0.06$;
$A_{20} = +13.3$; $A_{50} = -1.6$; $A_{66} = -0.0001$; $B_{52} = -0.152$;
$A_{21} = -1.7$; $A_{51} = +0.24$; $B_{11} = -1.3$; $B_{53} = +0.010$;
$A_{22} = -2.27$; $A_{52} = -0.02$; $B_{21} = -1.4$; $B_{54} = -0.002$;
$A_{30} = +3.0$; $A_{53} = -0.017$; $B_{22} = -3.36$; $B_{55} = +0.001$;
$A_{31} = +0.54$; $A_{54} = +0.008$; $B_{31} = -1.8$; $B_{61} = +0.06$;
$A_{32} = +0.14$; $A_{55} = +0.0007$; $B_{32} = +0.38$; $B_{62} = -0.013$;
$A_{33} = -0.154$; $A_{60} = -1.3$; $B_{33} = +0.034$; $B_{63} = -0.010$
$A_{40} = -3.3$; $A_{61} = -0.09$; $B_{41} = -1.15$; $B_{64} = +0.0022$;
$A_{41} = -0.16$; $A_{62} = -0.16$; $B_{42} = -0.10$; $B_{65} = +0.0002$;

Wie man sieht, stimmen die Coefficienten der Abteilung I und II in A.R. gut überein, dagegen weichen sie stark ab bei den D.

Letzteres hat seinen Grund zum grossen Teil wohl darin, dass die Eigenbewegungen in D. viel grösseren Schwankungen unterworfen sind, was auf die geringere Genauigkeit der früheren Deklinationsbestimmungen zurückzuführen ist.

In einigen Fällen ist deswegen bei den Deklinationscurven der Abteilung II ein sicherer Gang für dieselbe nicht zu ermitteln, und sind die Werte für diese Curventeile in Tafel II nicht angegeben.

Führt man die Constanten in die Entwickelung ein, so werden die Eigenbewegungen durch folgende Ausdrücke dargestellt:

Abt. I.

$$\text{E.B. in A.R.} = -30 - 18.48\cos^6\vartheta - 3.84\cos^5\vartheta + 9.14\cos^4\vartheta + 6.74\cos^3\vartheta - 10.61\cos^2\vartheta - 11.05\cos\vartheta$$
$$+\{+271.\cos^5\vartheta + 209.6\cos^4\vartheta - 112.95\cos^3\vartheta - 62.8\cos^2\vartheta + 34.14\cos\vartheta + 79.15\}\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$+\{-66.5\cos^5\vartheta - 83.2\cos^4\vartheta + 38.08\cos^3\vartheta + 17.3\cos^2\vartheta - 10.2\cos\vartheta - 18.11\}\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$+\{-85.8\cos^4\vartheta - 34.1\cos^3\vartheta - 7.3\cos^2\vartheta + 5.0\cos\vartheta - 15.4\}\sin^2\vartheta\cos 2\varphi$$
$$+\{-60.6\cos^4\vartheta - 14.2\cos^3\vartheta + 12.6\cos^2\vartheta - 1.7\cos\vartheta - 4.8\}\sin^2\vartheta\sin 2\varphi$$
$$+\{-6.1\cos^3\vartheta + 6.6\cos^2\vartheta - 3.5\cos\vartheta - 1.4\}\sin^3\vartheta\cos 3\varphi$$
$$+\{-17.3\cos^3\vartheta - 26.4\cos^2\vartheta + 0.5\cos\vartheta - 1{,}3\}\sin^3\vartheta\sin 3\varphi$$
$$+\{-24.4\cos^2\vartheta - 1.8\cos\vartheta - 3.5\}\sin^4\vartheta\cos 4\varphi$$
$$+\{-13.5\cos^2\vartheta - 0.9\cos\vartheta + 0.4\}\sin^4\vartheta\sin 4\varphi$$

$$\text{E.B. in D} = -28.3 - 46.3\cos\vartheta + 8.0\cos^2\vartheta - 46.5\cos^3\vartheta + 38.6\cos^4\vartheta + 17.3\cos^5\vartheta - 34.4\cos^6\vartheta$$
$$+\{+8.5 + 7.3\cos\vartheta - 13.5\cos^2\vartheta - 2.7\cos^3\vartheta + 1.2\cos^4\vartheta - 26.0\cos^5\vartheta\}\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$+\{-18.6 - 3.1\cos\vartheta + 16.6\cos^2\vartheta - 23.1\cos^3\vartheta - 104.7\cos^4\vartheta + 12.0\cos^5\vartheta\}\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$+\{-21.1 - 1.0\cos\vartheta + 32.1\cos^2\vartheta - 76.1\cos^3\vartheta - 90.9\cos^4\vartheta\}\sin^2\vartheta\cos 2\varphi$$
$$+\{+0.9 + 1.2\cos\vartheta - 7.5\cos^2\vartheta - 22.0\cos^3\vartheta + 78.0\cos^4\vartheta\}\sin^2\vartheta\sin 2\varphi$$
$$+\{-9.0 - 11.6\cos\vartheta - 8.7\cos^2\vartheta + 17.3\cos^3\vartheta\}\sin^3\vartheta\cos 3\varphi$$
$$+\{+1.2 - 5.2\cos\vartheta + 19.1\cos^3\vartheta\}\sin^3\vartheta\sin 3\varphi$$
$$+\{-1.2 + 1.5\cos\vartheta + 10.4\cos^2\vartheta\}\sin^4\vartheta\cos 4\varphi$$
$$+\{-4.7 - 10.4\cos\vartheta\}\sin^5\vartheta\cos 5\varphi.$$

Abt. II.

$$\text{E.B. in A.R.} = -25.0 + 16.7\cos\vartheta - 14.9\cos^2\vartheta - 31.6\cos^3\vartheta + 39.4\cos^4\vartheta + 24.5\cos^5\vartheta - 34.5\cos^6\vartheta$$

$$+\{+53.8 + 13.7\cos\vartheta - 17.6\cos^2\vartheta - 37.6\cos^3\vartheta + 102.4\cos^4\vartheta + 60.6\cos^5\vartheta\}\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$+\{-16.7 - 12.0\cos\vartheta + 28.4\cos^2\vartheta + 11.3\cos^3\vartheta - 63.0\cos^4\vartheta - 0.9\cos^5\vartheta\}\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$+\{-3.9 - 4.4\cos\vartheta + 3.3\cos^2\vartheta + 10.2\cos^3\vartheta - 16.4\cos^4\vartheta\}\sin^2\vartheta\cos 2\varphi$$
$$+\{+5.0 + 9.5\cos\vartheta + 0.2\cos^2\vartheta - 14.2\cos^3\vartheta - 4.4\cos^4\vartheta\}\sin^2\vartheta\sin 2\varphi$$
$$+\{+0.3 - 0.9\cos\vartheta + 1.4\cos^2\vartheta - 8.0\cos^3\vartheta\}\sin^3\vartheta\cos 3\varphi$$
$$+\{-2.7 - 6.8\cos\vartheta - 9.4\cos^2\vartheta - 5.9\cos^3\vartheta\}\sin^3\vartheta\sin 3\varphi$$
$$+\{-0.7 + 3.1\cos\vartheta + 4.6\cos^2\vartheta\}\sin^4\vartheta\cos 4\varphi$$
$$+\{-0.2 - 2.0\cos\vartheta - 8.3\cos^2\vartheta\}\sin^4\vartheta\sin 4\varphi$$

$$\text{E.B. in D.} = -16.0 - 30.9\cos\vartheta + 23.6\cos^2\vartheta + 21.5\cos^3\vartheta + 11.4\cos^4\vartheta - 15.6\cos^5\vartheta - 18.2\cos^6\vartheta$$

$$+\{+1.0 - 3.7\cos\vartheta - 1.9\cos^2\vartheta + 3.5\cos^3\vartheta + 7.8\cos^4\vartheta - 7.7\cos^5\vartheta\}\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$+\{-0.9 + 4.9\cos\vartheta - 12.0\cos^2\vartheta - 23.9\cos^3\vartheta - 2.3\cos^4\vartheta + 5.2\cos^5\vartheta\}\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$+\{-7.1 + 3.1\cos\vartheta + 24.7\cos^2\vartheta - 3.1\cos^3\vartheta - 69.3\cos^4\vartheta\}\sin^2\vartheta\cos 2\varphi$$
$$+\{-10.8 + 8.4\cos\vartheta - 2.8\cos^2\vartheta - 23.6\cos^3\vartheta - 4.3\cos^4\vartheta\}\sin^2\vartheta\sin 2\varphi$$
$$+\{-1.1 + 4.3\cos\vartheta - 9.4\cos^2\vartheta - 12.1\cos^3\vartheta\}\sin^3\vartheta\cos 3\varphi$$
$$+\{+2.6\cos\vartheta + 4.7\cos^2\vartheta - 17.3\cos^3\vartheta\}\sin^3\vartheta\sin 3\varphi$$
$$+\{+3.6 + 7.6\cos\vartheta - 5.2\cos^2\vartheta\}\sin^4\vartheta\cos 4\varphi$$
$$+\{-0.8 - 1.9\cos\vartheta + 10.4\cos^2\vartheta\}\sin^4\vartheta\sin 4\varphi.$$

In diesen Formeln ist die Eigenbewegung in A.R. im Bogenmaass des Paralles gemessen.

Ferner ist ϑ die transformierte Polardistanz und

$$\varphi = \alpha - 15^0$$

wenn α die Rectascension bedeutet.

Wollte man statt ϑ und φ in diese Ausdrücke δ und α einführen, so würden dieselben sehr compliziert werden. Aber auch in der vorliegenden Fassung lassen sich dieselben nicht allgemein discutieren.

Ich habe daher die Coeffizienten von $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos 2\varphi$ u. s. w. für die einzelnen früher angegebenen Polardistanzen berechnet und erhalten.

Abt. I. A.R.

$\delta = -20°3$:	-33.5	$+67.7\cos\varphi - 16.2\sin\varphi - 15.1\cos 2\varphi - 4.7\sin 2\varphi$ $- 1.1\cos 3\varphi - 5.0\sin 3\varphi - 4.8\cos 4\varphi - 1.0\sin 4\varphi$
-7.7:	-32.1	$+81.1\cos\varphi - 18.6\sin\varphi - 14.2\cos 2\varphi - 6.0\sin 2\varphi$ $- 1.2\cos 3\varphi - 1.6\sin 3\varphi - 3.8\cos 4\varphi$
$+4.9$:	-30.0	$+80.3\cos\varphi - 18.5\sin\varphi - 15.4\cos 2\varphi - 4.8\sin 2\varphi$ $- 1.4\cos 3\varphi - 1.3\sin 3\varphi - 3.5\cos 4\varphi$
$+17.5$:	-30.9	$+79.0\cos\varphi - 17.1\sin\varphi - 14.6\cos 2\varphi - 4.5\sin 2\varphi$ $- 2.3\cos 3\varphi - 7.0\sin 3\varphi - 5.0\cos 4\varphi$
$+30.1$:	-32.4	$+76.8\cos\varphi - 16.1\sin\varphi - 15.9\cos 2\varphi - 3.2\sin 2\varphi$ $- 3.5\cos 3\varphi - 7.0\sin 3\varphi - 6.0\cos 4\varphi - 1.8\sin 4\varphi$
$+42.7$:	-29.9	$+87.6\cos\varphi - 17.2\sin\varphi - 17.9\cos 2\varphi - 8.7\sin 2\varphi$ $- 1.1\cos 3\varphi - 7.2\sin 3\varphi - 4.9\cos 4\varphi - 1.8\sin 4\varphi$
$+55.3$:	-32.2	$+113.3\cos\varphi - 15.4\sin\varphi - 24.3\cos 2\varphi - 13.6\sin 2\varphi$ $- 0.6\cos 3\varphi - 5.0\sin 3\varphi - 2.2\cos 4\varphi$

Abt. II. A.R.

$\delta = -20°3$:	-21.4	$+50.1\cos\varphi - 17.2\sin\varphi - 2.8\cos 2\varphi - 1.7\sin 2\varphi - 0.8\sin 3\varphi$
-7.7:	-22.4	$+54.8\cos\varphi - 17.7\sin\varphi - 4.4\cos 2\varphi - 3.1\sin 2\varphi - 1.7\sin 3\varphi$
$+4.9$:	-23.8	$+54.4\cos\varphi - 17.2\sin\varphi - 3.6\cos 2\varphi + 4.4\sin 2\varphi - 3.0\sin 3\varphi$
$+17.5$:	-21.6	$+54.0\cos\varphi - 17.3\sin\varphi - 4.6\cos 2\varphi + 6.7\sin 2\varphi - 4.7\sin 3\varphi$
$+30.1$:	-20.7	$+49.1\cos\varphi - 15.8\sin\varphi - 3.9\cos 2\varphi + 6.0\sin 2\varphi - 6.0\sin 3\varphi$
$+42.7$:	-19.0	$+47.9\cos\varphi - 15.1\sin\varphi - 3.1\cos 2\varphi + 3.4\sin 2\varphi - 5.4\sin 3\varphi$
$+55.3$:	-19.0	$+40.7\cos\varphi - 12.3\sin\varphi - 1.9\cos 2\varphi + 1.0\sin 2\varphi - 4.3\sin 3\varphi$

Diese Gleichungen sind zuerst von der Präcession zu befreien.

Bedeutet ψ die Lunisolarpräcession, λ die Präcession durch die Planeten, ω die Schiefe der festen Ekliptik, so wird die Correction für die Präcession in AR. in folgender Gestalt auftreten:

$$(\cos\delta\cos\omega + \sin\alpha\sin\delta\sin\omega)\,\Delta\left(\frac{d\psi}{dt}\right) - \cos\delta\,\Delta\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)$$

oder

$$\Delta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)\cos\delta\cos\omega - \Delta\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)\cos\delta + \sin\alpha\,\Delta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)\sin\delta\sin\omega.$$

Die in unseren Gleichungen auftretende Constante wird also sein

$$C = \Delta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)\cos\delta\cos\omega - \Delta\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)\cos\delta$$

während das Glied $\sin\alpha\, \Delta\left(\frac{d\lambda}{dt}\right) \sin\delta \sin\omega$ mit dem Coeffizienten von $\sin\varphi$ verbunden ist.

Nimmt man für die Präcession durch die Planeten die von L. Struve aus annähernd den gleichen Eigenbewegungen gefundene Correction der O. Struve'schen Constanten, mit der die Bradley'schen Beobachtungen von Auwers reduciert sind an nämlich $0''.0051$ für 1755.0, so erhält man folgende Correctionen der Lunisolarpräcession aus den Gleichungen in Rectascension:

$\Delta\left(\frac{d\psi}{dt}\right) =$	Abt. I.	Abt. II.
	— 28.6	— 19.3
	— 28.9	— 20.2
	— 27.2	— 20.5
	— 28.5	— 19.5
	— 30.5	— 18.0
	— 28.6	— 16.6
	— 32.0	— 16.7
Mittel:	— 29.19	— 18.69

Da die erste Abteilung 1596, die zweite 1494 Sterne umfasst, so findet man als Gewicht für Abt. I 1.1, für Abt. II 1.0.

Wie sich aus dem Zurückrechnen nach den oben angegebenen Formeln ergiebt, werden die der Entwickelung zu grunde gelegten Curven durch die Gleichungen mit folgendem mittleren Fehler dargestellt:

$\delta =$	Abt. I.	Abt. II.
$-20°.3$:	± 4.12	± 5.18
— 7.7:	4.26	4.80
— 4.9:	4.12	2.92
— 17.5:	2.07	2.00
— 30.1:	2.83	1.30
— 42.7:	3.74	1.27
— 55.3:	7.81	1.62

Ich habe jedoch den oben angegebenen Correctionen innerhalb jeder Abteilung das gleiche Gewicht gegeben, da sich die Abweichungen bei

Berücksichtigung der Vorzeichen nahezu aufheben und somit auf die Bestimmung der Constanten nicht einwirken.

Verbindet man die beiden erhaltenen Werte mit Berücksichtigung der Gewichte, so erhält man

$$\Delta\left(\frac{d\psi}{dt}\right) = -24.19 \pm 5.25$$

Ludwig Struve fand als Correction für die O. Struve'sche Präcessionsconstante

$$-28.44,$$

beide Werte stimmen also verhältnismässig gut überein.

Die Präcessionsconstante wird also nach meiner Rechnung

$$\frac{d\psi}{dt} = 50''.3566 \qquad \text{Epoche } 1800.0$$

In den ermittelten Gleichungen ist ausser der Constanten noch ein von der Correction für die Präcession abhängiges Glied enthalten

$$\sin\alpha \sin\delta \sin\omega \, \Delta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)$$

Da $\varphi = \alpha - 15^0$, so sind also noch folgende Glieder zu addieren, die mit dem aus jeder Abteilung gefundenen Wert für $\Delta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)$ gebildet sind.

	Abt. I.	Abt. II.
$\delta = -20°.3$:	$-4.3\sin\varphi + 1.2\cos\varphi$;	$-2.9\sin\varphi + 0.7\cos\varphi$;
-7.7:	$-2.0\sin\varphi + 0.5\cos\varphi$;	$-1.4\sin\varphi + 0.4\cos\varphi$;
$+4.9$:	$-0.4\sin\varphi + 0.1\cos\varphi$;	$-0.3\sin\varphi$
$+17.5$:	$-2.8\sin\varphi + 0.8\cos\varphi$;	$-1.9\sin\varphi + 0.5\cos\varphi$;
$+30.1$:	$-5.1\sin\varphi + 1.4\cos\varphi$;	$-3.3\sin\varphi + 0.9\cos\varphi$;
$+42.7$:	$-7.0\sin\varphi + 1.9\cos\varphi$;	$-4.5\sin\varphi + 1.3\cos\varphi$;
$+55.3$:	$-8.7\sin\varphi + 2.3\cos\varphi$;	$-5.7\sin\varphi + 1.6\cos\varphi$;

Die Gleichungen stellen jetzt die reine Sonnenbewegung und die wahren Eigenbewegungen der Fixsterne dar, und beweisen somit, dass letztere sich nicht durch den einfachen sinus und cosinus darstellen lassen, sich also nicht wie zufällige Fehler ausgleichen.

Etwas ähnliches hat auch Gyldén gefunden.

Besonders fallen die Coeffizienten der von dem cos des doppelten Winkels abhängenden Glieder in Abt. I auf, welche die des $\sin\varphi$ erreichen.

Ein solches Glied kann aber weder die Airy'sche noch eine andere der früheren Methoden darstellen und sie reichen daher nicht zur vollständigen Darstellung der Eigenbewegungen in AR. aus, sondern die Abweichungen werden immer einen systematischen Gang zeigen müssen.

Was nun weiter interessiert, ist die AR. des Apex, die sich aus den obigen Ausdrücken ergiebt. Da die früheren Definitionen in unserem Falle nicht ausreichen, definiere ich als AR. des Apex allgemein diejenige, in welcher die Eigenbewegungen in AR. den Wert 0 haben, ihr Zeichen wechseln und wachsende AR. positive Eigenbewegungen haben.

Diese Orte lassen sich mit völlig hinreichender Genauigkeit graphisch aus den einzelnen Gleichungen herleiten. Man erhält aus

Abt. I.	**Abt. II.**
272°.1	266°.0
268.9	264.7
267.6	263.2
273.8	262.7
275.2	267.1
275.4	272.9
274.5	277.7
272°.50	267°.76

Mit Berücksichtigung der Gewichte für Abteilung I und II ergiebt sich hieraus als AR. des Apex

$$A = 270^0 \pm 2^0.24$$

Nahe denselben Wert findet L. Struve aus den Eigenbewegungen in AR., nämlich $A = 272^0 95$.

In den Formeln für $\varDelta\,\delta$ tritt die Correction für die Präcession in der Form auf

$$\cos\alpha \sin\omega\, \varDelta n \text{ oder da } \varDelta n = \varDelta\left(\frac{d\psi}{dt}\right) \sin\omega \cos\alpha \sin^2\omega\, \varDelta\left(\frac{d\psi}{dt}\right),$$

sie ist also mit dem mit $\cos\alpha$ multiplicierten Coeffizienten verbunden.

Für $\Delta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)$ kann man den mittleren Wert der Correction, den die AR. ergaben, annehmen. Berücksichtigt man nun, dass

$$\varphi = \alpha - 15^0,$$

so erhält man

$$3.8 \cos \varphi - 1.0 \sin \varphi.$$

Diese Glieder sind nun zu unseren Gleichungen zu addieren und letztere hängen jetzt nur mehr von der wahren Eigenbewegung der Fixsterne und der Bewegung unseres Sonnensystems ab.

Wie man sofort sieht, werden hier die Coeffizienten von $\sin 2\varphi$ und $\cos 2\varphi$ noch grösser, als bei der AR. und versagen also die früheren Methoden auch hier.

Berechnet man aus diesen Formeln den Hauptkreis, in welchem die Eigenbewegungen in D. Null werden und ihr Zeichen wechseln, so definiere ich als Deklination des Apex die des Durchschnittspunktes dieses Hauptkreises mit dem früher ermittelten Rectascensionskreis des Apex.

Die Entwickelung nach Kugelfunctionen stellt aber wegen der vielfachen unregelmässigen Ausbiegungen der Curven die Werte in der Nähe des Apex, die gerade dort verhältnismässig regelmässig laufen, so schlecht dar, dass ich mich bei der Bestimmung der Deklination des Apex auf die zugrunde liegenden Zahlen bezogen und dabei die Correction für die Präcession berücksichtigt habe. So wird z. B. die Curve Abt. II $\delta = +4^0.9$ durch folgende Zahlen dargestellt

$\delta = +4^0.9$: $-17 \quad -29 \quad -24 \quad -8 \quad -9 \quad -17 \quad -23 \quad -34 \quad -25 \quad -4 \quad -2 \quad -8$

in denen man also die ursprüngliche Curve gar nicht wieder erkennt. Die Bestimmung der D. des Apex hängt aber gerade von den Werten der Function in der Nähe dieser Polardistanzen ab und würde daher durch den Einfluss der übrigen Unregelmässigkeiten der Curven sehr ungenau.

Die Eigenbewegungen in Abt. I und II zeigen übrigens erhebliche Abweichungen. So zeigt sich bei Abt. II in der Nähe von 8^h ein positives Maximum, während bei Abt. I bei 9^h ein negatives Maximum des Kreises mit der EB. Null in Deklination eintritt.

Man erhält auf graphischem Wege, der für die Genauigkeit dieser Bestimmung völlig hinreicht, als Deklination des Apex

$$\text{Abt. I} \quad D = +13^{\circ}8 \quad \text{Gew. 1.1}$$

$$\text{Abt. II} \quad D = +\ 4^{\circ}7 \quad \text{Gew. 1.0}$$

also im Mittel mit Berücksichtigung der Gewichte

$$D = +\ 9^{\circ}9.$$

Wenngleich diese beiden unabhängig von einander gemachten Bestimmungen nicht sehr genau sind, so zeigen sie doch, dass die mittlere Deklination, die Ludwig Struve angiebt, mit

$$D = +\ 31^{\circ}0$$

zu gross sein dürfte, wie dieses auch schon Kobold findet.

Hierbei dürfen wir aber das Wort Apex nach dem früher gesagten nicht so definieren, dass wir mit demselben die Richtung der Bewegung unseres Sonnensystems bezeichnen, sondern nur denjenigen Punkt, für welchen sich die Distanz Sonne—Fixsterne am schnellsten vermindert.

Tafel I.

Abt. I.			Abt. II.		
Mittl. D.	EB. in AR.	EB. in D.	Mittl. D	EB. in AR.	EB. in D.
			0^h und I^h.		
— 21° 32′	+ 0.″031	— 0.″025	— 12° 13′	— 0.″032	— 0.″045
— 14 55	— 306	— 144	— 10 8	+ 3	— 19
— 11 32	— 29	— 97	— 5 47	— 28	— 38
— 6 22	+ 27	— 10	— 3 3	+ 14	+ 18
+ 3 13	— 22	+ 39	— 1 26	+ 35	— 5
+ 8 22	— 2	— 3	+ 0 59	+ 33	— 143
+ 13 14	+ 3	— 49	+ 3 43	— 16	— 54
+ 16 59	+ 23	+ 1	+ 5 55	— 3	— 19
+ 19 16	+ 13	— 174	+ 6 55	— 3	0
+ 20 35	+ 31	— 10	+ 11 23	+ 3	+ 3
+ 23 25	— 8	— 53	+ 13 51	+ 27	+ 1
+ 27 10	— 31	— 107	+ 14 52	+ 4	— 8
+ 30 36	+ 16	— 28	+ 15 40	+ 42	— 33
+ 33 13	+ 32	+ 1	+ 17 23	+ 24	— 10
+ 37 58	+ 55	— 4	+ 20 33	— 65	— 76
+ 41 25	— 25	— 89	+ 23 34	+ 28	0
+ 45 48	+ 4	— 45	+ 31 10	+ 14	— 4
+ 51 13	+ 26	— 15	+ 38 57	— 57	— 37
+ 55 41	+ 1.346	— 369	+ 44 5	— 58	— 2
+ 59 7	+ 24	— 4	+ 51 11	+ 80	— 52
			+ 55 4	— 33	— 18
			+ 60 23	+ 79	— 18
			+ 64 32	+ 48	— 7
			II^h und III^h.		
— 23° 40′	— 0.″030	— 0.″067	— 11° 38′	+ 0.″006	— 0.″019
— 18 42	+ 20	— 21	— 7 28	+ 2	— 72
— 12 25	— 168	+ 56	— 4 40	+ 20	— 77
— 8 0	— 5	— 18	— 1 14	— 24	— 59
— 4 2	+ 24	— 55	+ 3 45	— 13	— 11
— 1 16	— 19	— 109	+ 7 17	— 48	— 42

Mittl. D.	EB. in AR.	EB. in D.	Mittl. D.	EB. in AR.	EB. in D.
+ 3°44′	— 0.″009	— 0.″032	+ 11°33′	— 0.″009	— 0.″009
+ 8 12	+ 23	— 24	+ 16 56	+ 3	— 25
+ 10 38	+ 51	— 34	+ 18 2	+ 16	— 18
+ 15 26	+ 71	— 33	+ 19 46	+ 75	— 23
+ 19 37	— 24	— 40	+ 22 23	+ 24	— 61
+ 22 21	+ 5	— 39	+ 24 56	+ 60	— 70
+ 23 56	— 18	— 35	+ 27 23	— 39	— 10
+ 26 12	— 7	— 34	+ 34 7	+ 262	— 113
+ 29 19	+ 8	— 38	+ 45 43	— 15	— 34
+ 32 54	+ 216	— 52	+ 52 11	+ 23	— 37
+ 35 40	+ 62	— 35	+ 59 35	— 32	+ 6
+ 38 51	+ 18	— 54			
+ 43 29	+ 2	— 37			
+ 47 50	+ 92	— 34			
+ 50 21	+ 26	— 46			
		IV^{h} und V^{h}.			
— 23°37′	— 0.″054	— 0.″086	— 19°39′	— 0.″042	+ 0.″020
— 18 43	+ 34	— 105	— 13 55	— 5	— 3
— 14 5	— 28	— 23	— 10 4	— 6	— 24
— 11 5	— 24	— 24	— 7 0	— 33	+ 5
— 8 20	— 340	— 575	— 2 45	— 39	— 19
— 6 49	— 23	— 5	+ 2 12	— 17	— 17
— 5 27	— 44	+ 4	+ 7 36	— 4	— 64
— 3 30	— 20	— 14	+ 13 36	+ 69	— 8
— 1 18	— 20	— 3	+ 14 14	+ 22	— 20
+ 1 7	— 24	— 6	+ 14 47	+ 72	— 19
+ 2 59	— 17	— 7	+ 15 20	+ 72	— 14
+ 6 7	+ 62	— 1	+ 15 50	+ 4	— 11
+ 7 58	— 9	— 10	+ 16 58	— 5	— 23
+ 9 18	+ 2	— 85	+ 18 17	+ 19	— 25
+ 11 25	+ 6	— 17	+ 20 1	+ 4	— 10
+ 13 16	+ 9	— 24	+ 21 48	+ 21	— 18
+ 15 12	+ 45	— 23	+ 22 47	— 11	0
+ 16 23	+ 34	— 36	+ 23 46	+ 8	— 32
+ 17 31	+ 182	— 5	+ 28 58	— 1	— 27
+ 19 15	+ 13	— 21	+ 35 20	+ 1	+ 4

Mittl. D.	EB. in AR.	EB. in D.	Mittl. D.	EB. in AR.	EB. in D.
+ 21° 1′	— 0.″020	— 0.″040	+ 40°34′	— 0.″021	— 0.″011
+ 23 35	+ 14	— 35	+ 44 19	+ 29	— 47
+ 27 18	— 9	— 95	+ 49 31	— 30	— 33
+ 32 58	— 2	— 23	+ 53 57	+ 28	— 48
+ 35 52	— 12	— 30	+ 55 51	— 1	— 46
+ 39 27	+ 82	— 101	+ 57 35	+ 35	— 43
+ 43 22	+ 8	— 99	+ 60 21	— 43	+ 1
+ 52 39	— 21	— 48	+ 64 8	— 15	— 94
+ 58 10	+ 2	— 36			

VI^{h} und VII^{h}.

— 26°11′	— 0.″025	+ 0.″060	— 26°26′	— 0.″035	— 0.″040
— 23 45	— 52	+ 18	— 20 50	— 29	— 40
— 21 19	— 15	+ 23	— 15 35	— 53	— 60
— 17 10	— 114	— 285	— 6 11	— 35	+ 4
— 11 35	— 67	+ 8	+ 1 29	— 61	+ 25
— 5 49	— 21	+ 58	+ 6 13	— 14	— 8
— 2 9	— 31	+ 12	+ 11 15	— 20	— 4
+ 4 6	— 147	— 166	+ 14 59	— 5	— 12
+ 8 47	— 29	+ 1	+ 17 11	— 23	+ 7
+ 12 24	— 13	— 23	+ 19 33	— 30	+ 8
+ 16 23	— 9	— 24	+ 21 57	— 38	— 11
+ 18 40	— 34	— 69	+ 23 24	— 47	— 17
+ 21 28	— 39	— 33	+ 24 33	— 24	— 24
+ 24 1	— 36	— 30	+ 26 0	— 35	— 5
+ 27 21	— 41	— 87	+ 27 24	— 59	— 2
+ 29 36	— 137	— 66	+ 30 30	— 31	— 7
+ 35 28	— 37	— 67	+ 36 11	— 24	— 20
+ 43 43	— 56	— 14	+ 39 55	— 9	+ 10
+ 50 42	— 28	— 15	+ 44 39	— 11	— 42
+ 57 41	— 53	— 35	+ 51 57	— 49	— 44
			+ 57 25	— 21	— 71
			+ 59 0	— 85	— 9
			+ 60 0	— 65	+ 11
			+ 62 6	— 65	— 7

Mittl. D.	EB. in AR.	EB. in D.	Mittl. D.	EB. in AR.	EB. in D.
			VIII^h und IX^h.		
— 20°47′	— 0.″045	+ 0.″004	— 12°55′	— 0.″013	— 0.″019
— 9 25	— 76	— 6	— 10 4	— 12	— 22
— 3 12	— 8	— 10	— 7 46	— 47	+ 12
+ 5 6	— 56	— 57	— 6 38	— 41	— 12
+ 8 57	— 55	— 7	— 4 10	— 66	+ 17
+ 12 4	— 108	— 30	+ 5 53	— 61	— 9
+ 16 5	— 33	— 34	+ 9 12	— 67	+ 5
+ 20 57	— 59	— 61	+ 11 55	— 34	+ 5
+ 25 57	— 79	— 51	+ 13 59	— 21	— 6
+ 29 21	— 20	— 84	+ 15 33	— 142	+ 30
+ 34 46	— 154	— 73	+ 17 6	— 85	— 13
+ 40 50	— 138	— 90	+ 18 33	— 53	+ 5
+ 49 36	— 119	— 89	+ 19 46	— 50	— 9
+ 55 15	— 266	— 88	+ 20 42	— 75	+ 10
			+ 23 8	— 85	— 43
			+ 26 55	— 78	— 90
			+ 29 51	— 116	— 49
			+ 32 17	— 49	— 9
			+ 35 16	— 190	— 80
			+ 39 0	— 79	+ 1
			+ 45 43	— 14	— 2
			+ 57 54	— 44	— 11
			X^h und XI^h.		
— 28°57′	— 0.″111	+ 0.″064	— 24°31′	— 0.″028	— 0.″008
— 23 45	— 31	— 14	— 7 40	— 72	+ 26
— 17 13	— 185	— 7	— 6 29	— 93	+ 41
— 12 1	— 52	+ 97	— 1 34	— 78	— 1
— 4 23	— 64	— 13	+ 1 37	— 19	— 8
+ 1 54	+ 94	— 66	+ 4 5	— 155	+ 21
+ 5 19	— 96	— 10	+ 5 27	— 64	+ 9
+ 8 31	— 104	— 24	+ 8 20	— 69	— 13
+ 12 31	— 38	— 10	+ 12 54	— 74	+ 8
+ 15 54	— 213	— 71	+ 18 26	— 74	+ 9
+ 19 26	+ 52	— 35	+ 22 41	— 139	— 48
+ 24 23	— 68	+ 20	+ 25 46	— 175	— 6

Mittl. D.	EB. in AR.	EB. in D.	Mittl. D.	EB. in AR.	EB. in D.
+ 31° 1′	— 0.″141	— 0.″097	+ 30° 10′	— 0.″120	— 0.″010
+ 36 59	— 120	— 133	+ 34 29	— 52	— 4
+ 41 7	— 139	+ 4	+ 39 39	— 72	— 29
+ 50 50	— 190	— 6	+ 46 21	— 81	— 2
+ 57 51	— 23	+ 2	+ 59 15	— 82	— 12
		XII^h und XIII^h.			
— 25° 50′	— 0.″022	— 0.″055	— 28° 26′	— 0.″195	— 0.″068
— 18 28	— 312	— 213	— 22 2	— 54	— 12
— 11 53	— 121	— 33	— 16 14	— 49	— 45
— 4 9	— 194	— 86	— 11 59	— 93	— 4
+ 2 20	— 257	— 29	— 9 0	— 56	— 3
+ 8 32	— 160	+ 5	— 7 21	— 89	+ 1
+ 16 58	— 172	— 61	— 5 15	— 39	+ 19
+ 20 35	— 133	— 25	— 2 58	— 62	+ 3
+ 24 53	— 52	— 21	+ 3 21	— 50	— 6
+ 28 4	— 24	— 18	+ 9 9	— 34	— 81
+ 34 17	— 239	+ 134	+ 13 16	— 42	— 19
+ 40 58	— 194	+ 38	+ 19 5	— 28	— 11
+ 46 21	— 236	+ 42	+ 23 20	— 39	— 16
+ 54 7	— 1	+ 4	+ 26 22	— 33	— 31
+ 58 25	+ 30	+ 7	+ 28 56	— 94	— 37
			+ 44 55	— 64	— 6
			+ 52 47	— 82	— 7
			+ 57 20	— 9	— 13
		XIV^h und XV^h.			
— 28° 26′	+ 0.″002	— 0.″067	— 27° 30′	— 0.″084	— 0.″050
— 26 20	— 79	— 23	— 22 4	— 57	— 78
— 24 40	— 94	— 41	— 16 40	— 45	— 65
— 22 3	— 34	— 27	— 15 21	— 139	— 172
— 19 10	— 27	— 46	— 14 0	— 26	— 41
— 13 20	— 27	+ 13	— 11 6	— 48	— 67
— 7 7	— 27	— 140	— 7 29	— 6	— 97
— 2 51	— 87	— 94	— 1 5	— 52	— 20
+ 2 18	— 4	— 124	+ 1 29	— 46	— 28
+ 8 15	— 10	— 18	+ 7 59	— 62	— 10

Mittl. D.	EB. in AR.	EB. in D.	Mittl. D.	EB. in AR.	EB. in D.
+ 13° 5′	— 0.″067	— 0.″029	+ 13°27′	— 0.″072	+ 0.″010
+ 17 9	— 18	— 212	+ 16 32	— 10	— 36
+ 19 30	— 221	— 391	+ 19 3	— 41	+ 12
+ 24 14	— 34	— 20	+ 51 50	— 109	+ 2
+ 27 36	— 68	— 23			
+ 30 26	— 66	— 12			
+ 33 54	— 77	— 204			
+ 38 51	— 87	+ 61			
+ 42 31	+ 73	+ 160			
+ 47 12	— 182	— 4			
+ 56 10	— 193	+ 3			

XVI^h und XVII^h.

— 28°37′	— 0.″028	+ 0.″045	— 28° 2′	— 0.″201	— 0.″395
— 25 8	— 120	— 371	— 25 0	— 21	— 35
— 23 46	— 42	— 48	— 24 25	— 47	— 34
— 21 9	+ 5	— 45	— 23 21	— 5	— 31
— 14 55	— 20	— 0	— 20 15	— 55	— 25
— 9 1	+ 29	— 112	— 10 36	— 31	— 13
— 2 6	+ 61	— 98	+ 2 1	— 35	— 1
+ 2 9	— 22	— 201	+ 4 2	— 35	+ 7
+ 6 33	— 32	+ 34	+ 7 0	— 76	— 25
+ 10 6	— 94	+ 2	+ 11 52	— 54	— 39
+ 15 7	— 5	— 33	+ 13 34	— 7	— 83
+ 20 23	— 47	— 1	+ 23 50	— 64	+ 15
+ 26 19	— 83	— 148	+ 25 9	— 11	— 7
+ 30 1	— 21	+ 13	+ 27 27	— 16	+ 2
+ 32 45	— 166	— 85	+ 32 9	— 46	+ 9
+ 36 35	— 107	+ 10	+ 40 5	+ 26	— 50
+ 42 54	— 31	+ 6	+ 50 1	— 19	— 33
+ 48 41	— 41	+ 55			
+ 52 56	— 5	+ 44			
+ 62 26	+ 112	+ 50			

Mittl. D.	EB. in AR.	EB. in D.	Mittl. D.	EB. in AR.	EB. in D.
		XVIII^h und XIX^h.			
— 28°42′	— 0.″033	— 0.″049	— 27°48′	+ 0.″216	— 0.″077
— 26 12	— 43	— 29	— 24 13	— 25	— 1
— 23 40	+ 14	— 28	— 22 40	— 36	— 12
— 20 43	— 49	— 17	— 20 37	— 46	— 55
— 17 38	— 14	— 22	— 17 20	— 2	— 11
— 11 31	— 4	+ 10	— 13 57	— 1	— 22
— 7 28	— 20	— 55	— 8 19	— 26	— 27
— 4 33	— 92	— 191	— 2 42	— 8	— 67
— 0 50	+ 2	+ 24	— 0 41	— 14	— 12
+ 1 31	— 53	+ 12	+ 5 32	— 5	— 24
+ 5 24	+ 28	— 96	+ 11 58	— 9	+ 19
+ 9 19	+ 130	+ 81	+ 15 2	— 88	— 96
+ 12 58	+ 91	+ 67	+ 17 38	— 23	0
+ 16 39	+ 10	+ 18	+ 20 7	— 16	+ 17
+ 18 39	+ 7	+ 18	+ 22 50	— 15	— 24
+ 21 40	+ 19	— 101	+ 27 4	— 21	— 30
+ 23 16	— 33	+ 1	+ 31 37	+ 1	— 42
+ 26 28	— 30	— 76	+ 37 0	+ 18	+ 46
+ 30 39	+ 24	— 32	+ 44 2	— 91	— 40
+ 33 23	— 26	— 70	+ 58 0	— 28	— 14
+ 35 57	— 79	— 51			
+ 37 58	+ 54	+ 66			
+ 41 38	— 1	— 28			
+ 51 11	— 3	+ 58			
+ 55 9	— 10	— 1			
+ 64 10	+ 245	+ 97			

Mittl. D.	EB. in AR.	EB. in D.	Mittl. D.	EB. in AR.	EB. in D.
		XX^h und XXI^h.			
— 29° 5′	— 0.″025	— 0.″039	— 26° 0′	— 0.″008	+ 0.″001
— 23 55	+ 8	— 49	— 21 46	+ 1	— 32
— 20 20	— 9	— 5	— 19 54	— 26	— 49
— 18 26	— 10	+ 1	— 17 14	— 10	+ 3
— 16 24	+ 44	— 108	— 14 27	— 24	— 5
— 13 31	+ 58	+ 9	— 11 34	+ 13	— 41
— 11 11	— 13	— 37	— 8 23	+ 4	— 92
— 7 20	+ 6	— 12	— 6 62	+ 16	— 41
— 2 0	+ 14	— 2	— 5 15	— 19	— 28
+ 3 3	— 10	— 49	— 2 21	+ 23	— 6
+ 5 30	+ 34	+ 8	+ 3 16	— 6	— 6
+ 9 29	+ 43	— 81	+ 8 32	— 20	+ 2
+ 11 20	+ 15	— 9	+ 12 36	+ 18	+ 66
+ 13 56	+ 29	+ 2	+ 17 56	— 9	— 14
+ 17 48	+ 41	— 28	+ 22 58	+ 15	— 2
+ 22 53	— 8	— 11	+ 27 52	— 28	— 18
+ 25 11	+ 41	— 34	+ 33 30	— 10	+ 13
+ 26 46	+ 7	— 61	+ 39 55	— 12	— 7
+ 28 48	0	— 17	+ 44 59	+ 42	+ 23
+ 32 39	+ 59	+ 42	+ 48 57	+ 54	— 6
+ 35 37	+ 30	+ 106	+ 54 7	+ 53	+ 6
+ 38 20	+ 21	+ 21	+ 58 2	+ 40	— 9
+ 41 17	+ 45	— 4	+ 61 58	+ 73	+ 23
+ 43 44	+ 53	+ 10			
+ 45 39	+ 7	+ 13			
+ 48 4	+ 18	— 11			
+ 55 32	+ 51	+ 143			
+ 62 15	+ 168	+ 16			

Mittl. D.	EB. in AR.	EB. in D.	Mittl. D.	EB. iu AR.	EB. in D.
		XXII^h und XXIII^h.			
— 25°17′	— 0.″018	— 0.″002	— 22°27′	— 0.″040	— 0.″012
— 21 16	— 28	— 71	— 17 1	+ 37	— 19
— 19 24	— 1	— 9	— 14 41	+ 27	+ 3
— 16 0	+ 47	— 73	— 12 40	+ 5	— 13
— 11 58	+ 46	— 15	— 10 27	— 12	+ 8
— 9 3	+ 24	— 28	— 7 34	— 34	— 14
— 5 45	— 10	— 5	— 5 0	— 8	— 64
— 2 6	+ 62	— 25	— 2 45	— 4	+ 2
+ 1 40	+ 186	— 26	— 0 34	+ 4	— 24
+ 4 29	+ 68	— 162	+ 1 28	— 41	— 5
+ 7 57	+ 77	+ 15	+ 5 31	+ 26	— 9
+ 9 45	+ 31	— 82	+ 13 56	+ 27	+ 3
+ 14 36	+ 32	— 9	+ 18 56	+ 112	— 17
+ 20 56	+ 36	+ 6	+ 23 34	+ 170	— 200
+ 25 29	+ 71	— 20	+ 29 3	+ 120	— 33
+ 29 41	+ 26	— 28	+ 35 31	+ 61	— 21
+ 39 12	— 6	— 3	+ 40 12	+ 11	+ 3
+ 43 35	+ 102	— 82	+ 44 25	+ 4	— 28
+ 47 1	+ 54	— 7	+ 51 54	+ 740	+ 82
+ 52 26	+ 148	— 50	+ 56 41	+ 98	— 4
+ 56 8	+ 147	— 29	+ 58 44	+ 33	— 12
+ 61 3	+ 5	— 19	+ 60 59	— 11	— 12

Tafel II.

Abt. 1. AR.

	−30°	−20°	−10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°
I^h	+ 43	+ 13	− 7	− 14	+ 1	+ 11	+ 16	+ 16	+ 22	+ 29
III	+ 44	+ 24	+ 12	+ 9	+ 15	+ 12	+ 10	+ 10	+ 17	+ 30
V	− 52	− 42	− 25	− 7	+ 6	+ 21	+ 52	+ 1	− 4	− 11
VII	− 79	− 65	− 48	− 31	− 28	− 36	− 44	− 48	− 48	− 44
IX	− 78	− 63	− 54	− 52	− 62	− 73	− 89	−107	−132	182
XI	− 63	− 62	− 65	− 80	− 95	−107	−123	−143	−162	−221
XIII	−145	−123	−123	−132	−142	−148	−161	−158	−189	−214
XV	− 66	− 49	− 39	− 30	− 35	− 46	− 54	− 93	−131	−198
XVII	− 72	− 51	− 38	− 36	− 46	− 58	− 68	− 69	− 63	− 50
XIX	− 31	− 30	− 22	− 10	− 5	− 3	− 1	0	0	+ 9
XXI	− 2	+ 10	+ 20	+ 26	+ 33	+ 31	+ 29	+ 30	+ 35	+ 44
XXIII	+ 10	+ 20	+ 30	+ 40	+ 49	+ 51	+ 58	+ 63	+ 76	+ 99

Abt. I. D.

	−30°	−20°	−10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°
I^h	+ 33	+ 30	+ 25	+ 5	− 21	− 37	− 41	− 36	− 25	− 14
III	+ 38	+ 35	+ 30	− 5	− 30	− 38	− 43	− 43	− 39	− 32
V	+ 44	+ 36	+ 18	− 2	− 17	− 32	− 50	− 61	− 62	− 57
VII	− 33	− 20	− 10	− 9	− 20	− 44	− 52	− 48	− 34	− 22
IX	− 10	− 3	+ 4	− 2	− 25	− 52	− 72	− 84	− 90	− 91
XI	− 20	− 26	− 22	− 15	− 37	− 40	− 50	− 47	− 32	− 21
XIII	+ 35	+ 40	+ 25	0	− 22	− 27	− 21	− 10	− 3	+ 11
XV	+ 58	+ 50	+ 33	+ 4	− 33	− 45	− 40	− 30	− 13	0
XVII	+ 79	+ 74	+ 57	+ 32	+ 2	− 21	− 22	− 4	+ 25	+ 40
XIX	+ 44	+ 40	+ 34	+ 24	+ 10	− 3	− 1	+ 7	+ 26	+ 35
XXI	+ 37	+ 29	+ 12	− 8	− 20	− 22	− 14	+ 3	+ 9	+ 13
XXIII	+ 44	+ 41	+ 27	+ 2	− 10	− 19	− 29	− 35	− 34	− 27

Abt. II. AR.

	−30°	−20°	−10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°
I^h	—	—	− 6	+ 4	+ 11	+ 10	+ 7	+ 5	+ 7	+ 14
III	− 17	− 11	+ 3	− 6	+ 4	+ 14	+ 13	+ 7	− 5	− 20
V	− 38	− 32	− 22	− 7	− 8	+ 10	+ 1	+ 3	+ 2	− 4
VII	− 44	− 39	− 37	− 30	− 28	− 34	− 30	− 27	− 25	− 41
IX	− 38	− 41	− 43	− 49	− 56	− 65	− 74	− 71	− 63	− 53
XI	− 74	− 75	− 78	− 79	− 83	− 92	− 99	− 88	− 90	−105
XIII	− 71	− 64	− 62	− 56	− 43	− 42	− 48	− 54	− 63	− 80
XV	− 70	− 66	− 62	− 56	− 51	− 49	− 54	− 66	—	—
XVII	− 36	− 36	− 38	− 37	− 34	− 27	− 19	− 15	− 18	− 30
XIX	− 20	− 20	− 16	− 10	− 11	− 15	− 12	− 12	− 15	− 22
XXI	− 3	− 7	− 5	− 2	− 3	− 3	− 0	+ 9	+ 26	+ 49
XXIII	− 18	− 10	− 2	+ 24	+ 57	+ 66	+ 63	+ 55	+ 54	+ 51

Abt. II. D.

	−30°	−20°	−10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°
I^h	—	—	+ 30	+ 2	− 11	− 19	− 22	− 25	− 28	− 32
III	—	—	+ 20	+ 4	− 24	− 35	− 38	− 35	− 29	− 23
V	—	+ 10	+ 5	− 6	− 12	− 19	− 25	− 32	− 37	− 43
VII	+ 46	+ 36	+ 26	+ 11	+ 3	− 6	− 14	− 20	− 25	− 28
IX	+ 12	+ 15	+ 13	+ 11	+ 3	− 14	− 31	− 32	− 27	− 20
XI	+ 16	+ 13	+ 10	+ 5	− 2	− 10	− 13	− 11	− 10	− 8
XIII	+ 46	+ 29	+ 8	− 7	− 18	− 24	− 24	− 17	− 12	− 10
XV	+ 43	+ 42	+ 14	+ 3	− 16	—	—	—	—	—
XVII	+ 42	+ 25	+ 10	− 8	− 23	− 28	− 23	− 17	− 19	− 25
XIX	+ 38	+ 34	+ 28	+ 13	+ 4	− 10	− 20	− 23	− 25	− 23
XXI	+ 25	+ 28	+ 27	+ 12	− 4	− 9	− 4	+ 5	+ 7	+ 4
XXIII	+ 8	+ 11	+ 12	+ 7	− 4	− 13	− 24	− 21	− 17	− 15

Tafel III.

Abt. I. AR.

	−20°	−10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°
I^h	+ 7	+ 9	+ 15	+ 18	+ 20	+ 25	+ 29	+ 36	+ 50
III	− 8	− 4	+ 2	+ 10	+ 15	+ 22	+ 10	+ 14	+ 24
V	− 24	− 19	− 11	− 4	− 1	− 10	− 12	− 14	− 18
VII	− 45	− 37	− 29	− 27	− 28	− 43	− 47	− 55	− 70
IX	− 65	− 57	− 53	− 50	− 65	− 84	− 95	−112	−140
XI	− 85	− 82	− 84	− 94	−102	−124	−142	−170	−216
XIII	− 96	−102	−113	−120	−124	−150	−159	−200	230
XV	− 76	− 70	− 71	− 86	− 86	−113	−123	−148	−190
XVII	− 47	− 37	− 35	− 37	− 36	− 54	− 57	− 67	− 96
XIX	− 22	− 8	− 5	0	+ 2	− 5	− 8	− 6	− 4
XXI	+ 3	+ 20	+ 24	+ 26	+ 28	+ 32	+ 42	+ 47	+ 56
XXIII	+ 22	+ 33	+ 39	+ 42	+ 43	+ 52	+ 62	+ 78	+106

Abt. I. D.

	−20°	−10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°
I^h	+ 33	+ 22	0	− 26	− 37	− 42	− 39	− 29	− 20
III	+ 33	+ 22	− 4	− 27	− 37	− 42	− 43	− 39	− 33
V	+ 25	+ 21	− 3	− 20	− 35	− 45	− 54	− 47	− 45
VII	0	+ 10	− 5	− 20	− 40	− 55	− 63	− 54	− 53
IX	− 17	0	− 10	− 26	− 49	− 65	− 62	− 56	− 52
XI	− 13	− 3	− 13	− 33	− 52	− 65	− 50	− 46	− 36
XIII	+ 20	+ 13	− 9	− 32	− 47	− 57	− 33	− 26	− 3
XV	+ 50	+ 35	+ 5	− 21	− 36	− 44	− 17	− 2	+ 28
XVII	+ 62	+ 50	+ 22	− 5	− 21	− 27	− 3	+ 18	+ 40
XIX	+ 53	+ 43	+ 23	+ 6	− 6	− 9	+ 6	+ 25	+ 34
XXI	+ 41	+ 31	+ 11	+ 1	− 10	− 14	− 2	+ 10	+ 13
XXIII	+ 35	+ 23	+ 3	− 12	− 23	− 27	− 20	− 14	− 8

Abt. II. AR.

	−20°	−10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°
I^h	− 12	+ 1	+ 9	+ 14	+ 20	+ 27	+ 18	+ 27	+ 24
III	− 22	− 5	+ 1	+ 4	+ 10	+ 10	+ 12	+ 8	+ 6
V	− 29	− 17	− 10	− 9	− 8	− 6	0	− 14	− 12
VII	− 41	− 33	− 29	− 29	− 32	− 32	− 27	− 35	− 42
IX	− 54	− 56	− 59	− 60	− 64	− 75	− 70	− 65	− 74
XI	− 63	− 75	− 80	− 82	− 87	− 97	− 83	− 87	−100
XIII	− 62	− 74	− 79	− 78	− 79	− 78	− 75	− 81	− 88
XV	− 41	− 60	− 61	− 56	− 52	− 54	− 55	− 76	− 66
XVII	− 33	− 34	− 33	− 34	− 30	− 32	− 30	− 36	− 38
XIX	− 18	− 15	− 12	− 13	− 10	− 13	− 12	− 9	+ 4
XXI	− 9	− 5	+ 3	+ 8	+ 10	+ 6	+ 10	+ 16	+ 38
XXIII	− 9	0	+ 15	+ 29	+ 32	+ 34	+ 26	+ 39	+ 44

Abt. II. D.

	−20°	−10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°
I^h	+ 20	+ 15	+ 3	− 12	− 19	− 23	− 24	− 26	− 23
III	+ 29	+ 13	− 2	− 19	− 28	− 37	− 35	− 32	− 35
V	+ 24	+ 16	− 3	− 13	− 19	− 26	− 32	− 36	− 40
VII	+ 31	+ 23	+ 11	+ 3	7	− 14	− 28	− 26	− 28
IX	+ 24	+ 16	+ 11	+ 4	− 7	− 13	− 13	− 14	− 16
XI	+ 17	+ 9	+ 2	− 6	− 14	− 18	− 14	− 10	− 9
XIII	+ 13	+ 7	− 4	− 16	− 24	− 26	− 19	− 15	− 15
XV	+ 15	+ 6	− 5	− 22	− 32	− 35	− 28	− 23	− 25
XVII	+ 25	+ 13	0	− 20	− 27	− 30	− 24	− 24	− 25
XIX	+ 32	+ 25	+ 13	− 4	− 11	− 17	− 10	− 10	− 11
XXI	+ 26	+ 24	+ 13	+ 1	− 9	− 10	− 4	0	+ 4
XXIII	+ 15	+ 14	+ 7	− 4	− 13	− 31	− 15	− 11	− 13

Seeliger'sche Tafeln.

$x = \cos \vartheta \qquad P_{ni}\,(+x) = \sin^i \vartheta\, P_i^n\,(x)$

$P_i^n\,(x) = \frac{d^i\, P^n\,(x)}{d\, x^i}$; $P_{ni}\,(-x) = (-1)^{n-i}\, P_{ni}\,(x)$

$P^0\,(x) = 1$;

$P_0^1\,(x) = x$ | $P_0^2\,(x) = 1.5\, x^2 - 0.5$ | $P_0^3\,(x) = x\,(-1.5 + 2.5\, x^2)$

$P_1^1\,(x) = 1$ | $P_1^2\,(x) = 3\, x$; | $P_1^3\,(x) = -1.5 + 7.5\, x^2$

$P_2^2\,(x) = 3$ | $P_2^3\,(x) = 15\, x$

$P_3^3\,(x) = 15$

$P_0^4\,(x) = 0.375 - 3.75\, x^2 + 4.375\, x^4$

$P_1^4\,(x) = x\,(-7.5 + 17.5\, x^2)$

$P_2^4\,(x) = -7.5 + 52.5\, x^2$

$P_3^4\,(x) = 105\, x$

$P_4^4\,(x) = 105$

$P_0^5\,(x) = x\,(1.875 - 8.75\, x^2 + 7.875\, x^4)$

$P_1^5\,(x) = 1.875 - 26.25\, x^2 + 39.375\, x^4$

$P_2^5\,(x) = x\,(-52.5 + 157.5\, x^2)$

$P_3^5\,(x) = -52.5 + 472.5\, x^2$

$P_4^5\,(x) = 945\, x$

$P_5^5\,(x) = 945$

$P_0^6\,(x) = -0.3125 + 6.5625\, x^2 - 19.6875\, x^4 + 14.4375\, x^6$

$P_1^6\,(x) = x\,(13.125 - 78.75\, x^2 + 86.625)\, x^4$

$P_2^6\,(x) = 13.125 \;\; 236.25\, x^2 + 433.125\, x^4$

$P_3^6\,(x) = x\,(-472.5 + 1732.5\, x^2)$

$P_4^6\,(x) = -472.5 + 5197.5\, x^2$

$P_5^6\,(x) = 10395\, x$

$P_6^6\,(x) = 10395.$

Log. $\mathfrak{A}_{ni}$:

$p + 1 = 7.$

n i	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7
0 0	8.811189	9.145671	9.280840	9.320104	9.280840	9.145671	8.811189
1 0	9.265626_n	9.492922_n	9.366322_n	$-\infty$	9.366322	9.492922	9.265626
1 1	8.485524	9.148432	9.417850	9.496195	9.417850	9.148432	8.485524
2 0	9.440196	9 356260	9.382818_n	9.718044_n	9.382818_n	9.356260	9.440196
2 1	8.684688_n	9.240410_n	9.248059_n	$-\infty$	0.248059	9.240410	8.684688
2 2	7.603556	8.594890	8.998557	9.115984	8.998757	8.594890	7.603556
3 0	9.509829_n	8.958949	9.771017	$-\infty$	9.771017_n	8.958949_n	9.509829
3 1	8.796008	9.157223	8.430385_n	9.262112_n	8.430385_n	9.157223	8.796008
3 2	7.726999_n	8.611148_n	8.753046_n	$-\infty$	8.753046	8.611148	7.726999
3 3	6.469776	7.789537	8.327453	8.483961	8.327453	7.789537	6.469776
4 0	9.503480	9.661256_n	9.328407_n	9.848378	9.328407_n	9.661256_n	9.503480
4 1	8.857156_n	8.822571_n	9.167745	$-\infty$	9.167745_n	8.822571	8.857156
4 2	7.805415	8.526716	7.660290	8.593105_n	7.660290	8.526716	7.805415
4 3	6.556236_n	7.768811_n	8.044958_n	$-\infty$	8.044958	7.768811	6.556236
4 4	5.174073	6.822261	7.494426	7.690015	7.494426	6.822261	5.174073
5 0	9.413240_n	9.801721	9.741786_n	$-\infty$	9.741786	9.801721_n	9.413240
5 1	8.881441	8.352059_n	8.946042_n	9.157377	8.946042_n	8.352059_n	8.881441
5 2	7.853330_n	8.319062_n	8.352349	$-\infty$	8.352349_n	8.319062	7.853330
5 3	6.614682	7.679208	7.304058	7.777165_n	7.304958	7.679208	6.614682
5 4	5.238539_n	6.779541_n	7.189936_n	$-\infty$	7.189936	6.779541	5.238539
5 5	3.759466	5.736081	6.542494	6.777165	6.542494	5.736081	3.759466
6 0	9.172685	9.668350_n	9.870184	9.928897_n	9.870184	9.668350_n	9.172685
6 1	8.873604_n	8.933660	8.739475_n	$-\infty$	8.739475	8.933660_n	8.873604
6 2	7.877494	7.839205	8.238596_n	8.326837	8.238596_n	7.839205	7.877494
6 3	6.652253_n	7.509515_n	7.376453	$-\infty$	7.376453_n	7.509515	6.652253
6 4	5.283596	6.685129	6.563583	6.849716_n	6.563583	6.685129	5.283596
6 5	3.809333_n	5.678761_n	6.223405_n	$-\infty$	6.223405	5.678761	3.809333
6 6	2.251079	4.556120	5.496782	5.770535	5.496782	4.556120	2.251079

*

Logarithmen.

a_1 9.112219	μ_1 9.977316_n	$\vartheta_1 = 161^\circ 38' 31''.7$
a_2 9.446701	μ_2 9.870129_n	$\vartheta_2 = 137\ 51\ 43.2$
a_3 9.581870	μ_3 9.608360_n	$\vartheta_3 = 113\ 56\ 38.8$
a_4 9.621134	μ_4 $-\infty$	$\vartheta_4 = 90$
a_5 9.581870	μ_5 9.608360	$\vartheta_5 = 66\ 3\ 21.2$
a_6 9.446701	μ_6 9.870129	$\vartheta_6 = 42\ 8\ 16.8$
a_7 9.112219	μ_7 9.977316	$\vartheta_7 = 18\ 21\ 28.3$